Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

Contrôle continu

Vendredi 10 Novembre 2006 – *Durée :* 2 heures

Calculatrice non autorisée. Le formulaire mathématique comprenant l'équation de Navier–Stokes en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques distribué en cours est le seul document autorisé durant l'épreuve.

On vous demande d'être concis, précis et rigoureux dans les réponses.

Tourbillon en laboratoire

Un expérimentateur en mécanique des fluides veut étudier un tourbillon de type atmosphérique en laboratoire. Cet expérimentateur sait que la force de Coriolis et les forces d'Archimède jouent un rôle important dans la physique donnant naissance à ces tourbillons. Pour autant, il ne veut pas reproduire en laboratoire un tourbillon avec une physique aussi complexe : son but est de faire tourner un disque entraîné par un moteur à la base d'un cylindre rempli d'eau et d'étudier le champ de vitesse généré par la rotation du disque. Le principe de l'expérience est schématisé sur la figure 1.

L'objectif de l'exercice ci-dessous est d'aider l'expérimentateur à préparer son expérience.

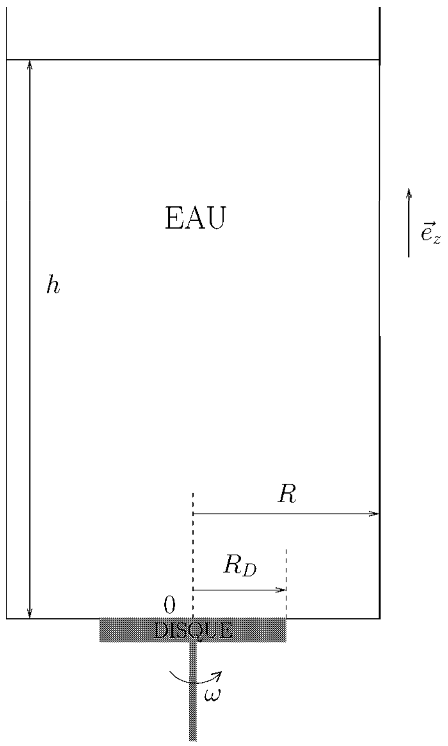

FIG. 1 – Schéma de principe du tourbillon expérimental.

a) Dans un premier temps, l'expérimentateur veut estimer le nombre de Reynolds d'un tourbillon atmosphérique. Pour cela, il prend comme vitesse caractéristique des vents 50 km/heure, comme taille caractéristique d'un tourbillon 100 km et comme viscosité de l'air $\nu_{\text{air}} = 5\ 10^{-5}$ S.I.

Quelles sont les unités de ν ? Quel est le nombre de Reynolds d'un tourbillon atmosphérique ? Qu'en concluez -vous ?

b) L'expérimentateur veut maintenant estimer le nombre de Reynolds qu'il peut obtenir en laboratoire avec le matériel dont il dispose. Il possède un cylindre de rayon $R = 10$ cm (voir figure 1), un disque de rayon $R_D = 5$ cm (voir figure 1) qui va entraîner le fluide à la base du cylindre, un moteur pouvant entraîner le disque à une vitesse angulaire $\omega_{max} = 1000$ tours/minute. Il construit le nombre de Reynolds maximum pour le tourbillon expérimental de la manière suivante

$$Re = \frac{(R_D \omega_{max})\ R}{\nu_{\text{eau}}}.$$

Pouvez-vous expliquer comment il obtient ce nombre ? Quelle est la valeur de ce nombre pour le tourbillon expérimental ? (On donne $\nu_{\text{eau}} = 10^{-6}$ S.I.)

L'expérimentateur décide que malgré les différences de valeur de Re entre les réponses aux questions **a)** et **b)**, l'expérience en laboratoire reste quand même pertinente pour l'étude de la dynamique d'un tourbillon atmosphérique. Comprenez-vous pourquoi ? Expliquez.

c) L'expérimentateur souhaite maintenant prédire analytiquement la forme du champ de vitesse en tout point de l'écoulement. Il utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec le centre du système de coordonnées O au centre du disque et $\vec{e}_z$ pointant vers le haut. Pour résoudre le champ de vitesse en tout point il fait un certain nombre d'hypothèses fortes. Il suppose que

- le fluide est supposé incompressible,
- l'écoulement est stationnaire (le terme $\partial \vec{u}/\partial t = \vec{0}$ dans l'équation de Navier–Stokes),
- l'écoulement est supposé bidimensionnel : si on prend le champ de vitesse à une hauteur z_0, celui-ci sera invariant en fonction de z, $\vec{u}(r, \theta, z) = \vec{u}(r, \theta, z_0)\ \ \forall z$,
- il n'y a pas de vitesse selon l'axe (Oz),
- l'écoulement est supposé à symétrie de révolution autour d'un axe (Oz),
- le fluide **au dessus** du disque ($0 < r < R_D$) tourne à la même vitesse que le disque, on dit que le fluide est en rotation « solide » avec le disque,
- le fluide suit un écoulement de type Couette cylindrique **autour du disque** ($R_D < r < R$) ; cet écoulement est caractérisé par un champ de vitesse satisfaisant $u_\theta(r) = C_1 r + C_2/r$ où C_1 et C_2 sont deux constantes.

Une partie de ces hypothèses revient à considérer ici que l'on ne tient pas compte d'une part de la condition de non glissement en $z = 0$ pour $R_D < r < R$, et que l'on ne tient pas compte d'autre part de la condition de surface libre en $z = h$.

i) Que nous apporte l'équation de la conservation de la masse concernant u_r ?

ii) Projeter l'équation de Navier–Stokes selon (Or) et $(O\theta)$. Que traduit l'équation selon (Or) en terme de pression ?

iii) Comment se traduit la rotation solide au dessus du disque ? Pour répondre à cette question on exprimera u_θ en fonction de r et de ω. Est-ce que cette rotation solide satisfait l'équation de

Navier–Stokes projetée selon $(O\theta)$ pour $O < r < R_D$?

iv) Déterminer le champ de vitesse pour $R_D < r < R$ en suivant les hypothèses.

v) En conclure que le champ de vitesse peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} u_\theta(r) = a\, r \text{ pour } 0 < r < R_D \\ u_\theta(r) = b\, r - \dfrac{bR^2}{r} = b\left(r - \dfrac{R^2}{r}\right) \text{ pour } R_D < r < R \end{cases}$$

où l'on précisera les valeurs des constantes a et b.

Ce dernier résultat permet de poursuivre l'exercice même si les constantes a et b n'ont pas été déterminées. Il est d'ailleurs conseillé de continuer à écrire le champ de vitesse en fonction de a et de b pour alléger les notations dans la suite de l'exercice.

vi) Tracer qualitativement $|\overrightarrow{u}_\theta|$ en fonction de r pour $O < r < R$

vii) En déduire la distribution du champ de pression en fonction du rayon à l'aide de l'équation de Navier–Stokes projetée selon (Or). On utilisera comme unique condition limite la continuité du champ de pression entre les deux zones de l'écoulement en $r = R_D \; \forall z$. A noter que le champ de pression $P(r, z)$ obtenu sera déterminé à une fonction $F(z)$ près, non déterminée.

d) Notre expérimentateur réalise maintenant que si le fluide est en rotation à une certaine vitesse au sein du tourbillon, la surface libre au sommet du tourbillon ne sera pas plate mais bien « creusée » au fur et à mesure que la vitesse augmente (phénomène analogue au tourbillon creux qui se développe au dessus du trou d'une baignoire lorsque celle-ci se vide). Dans cette partie de l'exercice, on va calculer la topographie de la surface libre en supposant que le fluide suit le champ de vitesse bidimensionnel obtenu en **c) v)**.

Ce calcul va servir à l'expérimentateur à déterminer si la topographie de la surface libre lorsque le moteur est rotation à ω_{max} n'est pas plus grande que la hauteur totale du cylindre.

i) Projeter l'équation de Navier–Stokes selon (Oz). En déduire à l'aide du résultat de la question **c) vii)** le champ de pression $P(r, z)$ pour $0 < r < R_D$ et $0 < z < h(r)$ où $h(r)$ désigne la hauteur totale d'eau au sein du tourbillon en mouvement.

ii) Utiliser la condition limite de la fonction $P(r, z)$ au point le plus bas de la surface libre, c'est à dire en $z = h(r = 0)$ et $r = 0$, afin de déterminer la constante laissée en suspens à la question i). On notera la pression atmosphérique P_0.

iii) Écrire la condition limite de la fonction $P(r, z)$ en tout point de la surface libre pour $0 < r < R_D$ et en déduire la topographie maximale au cœur de l'écoulement entre $r = 0$ et $r = R_D$ lorsque le moteur est à la vitesse maximale ω_{max}. On prendre $|g| = 10$ S.I. Est-ce que le cylindre de hauteur 30 cm de l'expérimentateur sera suffisant pour conduire une expérience à ω_{max} ?