# Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

**U.E. TUE 408, Mécanique des Fluides Géophysiques, 2005/2006**

# Contrôle continu

## Vendredi 18 Novembre 2005 – *Durée :* 2 heures

*Calculatrice non autorisée. Le formulaire mathématique ainsi que le formulaire donnant l'équation de Navier–Stokes en coordonnées cylindriques et coordonnées sphériques distribués en cours sont les seuls documents autorisés durant l'épreuve.*

**On vous demande d'être concis, précis et rigoureux dans la réponse aux questions.**

---

## Exercice 1 – Nouvelle planète

On vient de découvrir une nouvelle planète P dont le rayon est de 800 km. Les différentes mesures effectuées ainsi que la modélisation géophysique semblent indiquer d'une part que sa composition est identique à celle du manteau terrestre et que c'est une planète qui ne possède de noyau de densité différente. D'autre part, on n'observe pas de trace en surface d'une éventuelle tectonique des plaques. L'objet de l'exercice est de mener un calcul d'ordre de grandeur afin de répondre à la question suivante : l'intérieur de cette planète est-il dans un régime de convection thermique ?

**a)** Écrire l'équation générale de Navier–Stokes sous la forme vectorielle s'appliquant à un petit élément de volume dans la planète. On ne vous demande pas à ce stade d'expliciter les différentes forces en volume ; on vous demande par contre d'expliquer toutes vos notations.

**b)** D'après ce qu'on a vu en cours, comment peut-on réduire l'écriture de cette équation lorsqu'on l'applique au manteau terrestre. Écrire cette équation pour le manteau terrestre (on retranchera le gradient de pression hydrostatique).

**c)** On rappelle une des expressions possibles du nombre de Rayleigh

$$Ra = \frac{\alpha \, \Delta T \; g \; H^3}{\nu \kappa}. \tag{1}$$

Donnez le nom ainsi que les unités de chaque grandeur physique composant ce nombre. Vérifier que le nombre de Rayleigh est sans dimension. Quelle est la signification physique de ce nombre ? Que caractérisent le numérateur et le dénominateur ?

On a vu plusieurs façons de faire apparaître le nombre de Rayleigh en cours à partir des équations qui régissent la mécanique des fluides. Décrire dans les grands traits une de ces façons (on ne vous demande pas ici de redémontrer comment on obtient ce nombre).

**d)** Plutôt que d'utiliser la définition du nombre de Rayleigh donnée en (1), nous allons plutôt calculer le nombre de Rayleigh de la planète P avec l'expression suivante

$$Ra = \frac{\alpha g A H^5}{k \nu \kappa} \tag{2}$$

où $A$ est exprimée en W/m$^3$.

Quelle est la signification physique de $A$ ? Sauriez vous expliquer pourquoi il est préférable d'utiliser (2) plutôt que (1) ? (Le raisonnement est le même que celui utilisé dans le cas de la Terre puisque l'on suppose que la composition de P est identique à la composition de la Terre ...). Vérifier à nouveau que $Ra$ donné en (2) est sans dimension.

**e)** On vous demande ici de calculer explicitement la valeur de $Ra$ pour la planète P partir de (2). Pour cela on donne les valeurs des constantes physiques des roches mantelliques terrestre : $\alpha = 3.5 \times 10^{-5}$, $\kappa = 8 \times 10^{-7}$, $\nu = 10^{17}$, $k = 4$ et $A = 3.6\,10^{-8}$. Ces nombres sont exprimés en unités S.I. On prend comme valeur moyenne $g$= 0.74 S.I. ce qui correspond à la gravité à la surface d'une planète de densité uniforme 3.3 et de rayon 800 km.

Quelle est votre conclusion concernant la question posée au départ ?

---

## Exercice 2 – Écoulement d'une fluide visqueux dans une conduite elliptique

**a)** Écrire l'équation de Navier–Stokes sous la forme vectorielle avec des forces en volume nulles ($\overrightarrow{\mathcal{F}}_V = \overrightarrow{0}$ d'après les notations du cours). Adimensionner cette équation afin de faire apparaître le nombre de Reynolds.

On prendra pour échelle caractéristique de longueur $L_0$, pour vitesse caractéristique $U_0$ et pour pression caractéristique $P_0$.

Que caractérise le nombre de Reynolds ?

Justifier qualitativement pourquoi le nombre de Reynolds est grand ou petit dans 1) le manteau terrestre, 2) dans l'atmosphère terrestre.

---

On considère une conduite elliptique $\mathcal{E}$ schématisée sur la figure 1 dont la longueur du demi-grand axe est $a$ et la longueur du demi-petit axe est $b$. Un fluide visqueux, incompressible, à température constante s'écoule dans cette conduite dans la direction $x$ et dans le sens donné par le vecteur $\overrightarrow{e}_x$. La circulation de fluide est induit par une différence de pression $\Delta P$ sur la longueur $L$ de la conduite (c'est la différence de pression qui induit la circulation de fluide). On va chercher le profil de vitesse du fluide dans cette conduite.

La seule force en volume prise en compte est le poids du fluide.

**b)** Projeter l'équation de Navier–Stokes selon les 3 axes de coordonnées cartésiennes schématisées sur la figure 1. Pour cela, on considère d'une part que seule la composante de vitesse $u_x$ est non-nulle. On considère d'autre part que l'écoulement est stationnaire en temps. Enfin on suppose que $Re \ll 1$.

Quelle est, après projection, la seule (des 3) équation pertinente pour notre problème ?

**c)** Quelle information nous fournit la condition d'incompressibilité du fluide sur le champ de vitesse $u_x$ ?

Réécrire l'équation de Navier–Stokes obtenue à la question b) avec la nouvelle condition obte-

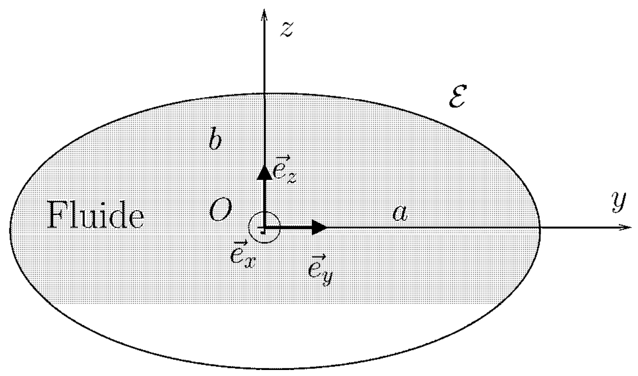


FIG. 1 – Schématisation de la conduite elliptique. L'écoulement se propage dans la direction $x$.

nue sur la fonction $u_x$.

**d)** On cherche une solution pour le champ de vitesse sous la forme

$$u_x = Ay^2 + Bz^2 + C, \tag{3}$$

où $A, B, C$ sont trois constantes à déterminer.
Quelle relation obtient-on entre $A$ et $B$ à partir de l'équation écrite en c).

**e)** Écrire la condition limite sur le champ de vitesse au bord de la conduite $\mathcal{E}$. En déduire une condition sur les constantes $A$, $B$ et $C$.

On rappelle que l'équation de l'ellipse de la figure 1 s'écrit

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

Pour déterminer la condition limite demandée, il sera judicieux de comparer directement la relation (3) écrite au bord de l'ellipse avec la relation (4) afin d'en déduire des expressions pour $A$, $B$ et $C$.

**f)** Combiner les conditions limites obtenues en d) et e) pour en déduire finalement que le champ de vitesse dans la conduite elliptique s'écrit

$$u_x = \frac{\Delta P}{2\mu L}\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right). \tag{5}$$

**g)** En quel point de la conduite la vitesse $u_x$ est-elle maximale ? Interprétez.

Construisez un nombre de Reynolds pour cet écoulement.

Dans le cas où $a$=200 m, $b$=100 m, $\mu = 10^{14}$ S.I., $\rho = 2000$ S.I. (ces deux dernières propriétés physiques correspondent à une lave), $\Delta P$ = 75 $10^5$ S.I., $L = 10000$ S.I., calculez la vitesse maximale au sein de la conduite (On pourra exprimer le résultat en (m / an) en utilisant 1 an $\simeq \pi\ 10^7$ s).

Calculer ensuite le nombre de Reynolds de l'écoulement que vous avez construit. Ce nombre conforte-t-il les hypothèses utilisées pour écrire Navier–Stokes.

Supposons maintenant que la variation de pression $\Delta P$ sur la longueur $L$ est induite par une légère inclinaison de la conduite elliptique par rapport à l'horizontal locale ; calculez cette inclinaison. (On utilisera ici l'équation de Navier–Stokes projetée selon $(Oz)$ et on utilisera $|\vec{g}| = 10$ S.I.)

**h)** Retrouvez l'expression du champ de vitesse de l'écoulement de Poiseuille cylindrique en appliquant l'expression (5) dans un cas particulier.