

**Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de
l'Environnement, Université Joseph-Fourier**

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

Examen

Jeudi 4 Janvier 2007 – *Durée* : 3 heures

*Calculatrice autorisée. Le formulaire distribué en cours est le seul document autorisé durant
l'épreuve.*

On vous demande d'être concis, précis et rigoureux dans la réponse aux questions.

Exercice 1 – Écoulement d'un glacier

On considère l'écoulement permanent d'un glacier, un fluide que l'on considérera newtonien, visqueux, isotherme, incompressible. Le glacier se situe sur une montagne assimilée à un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On note ρ la masse volumique du fluide et μ sa viscosité dynamique.

La surface libre du glacier est supposée à hauteur constante L . La pression P_0 est supposée constante à la surface du glacier. On suppose que la vitesse du glacier est en tout point parallèle à (Ox) (voir figure 1). On traite un problème bidimensionnel selon les directions (Ox) et (Oy) uniquement, en supposant que l'on n'a pas de variation de grandeurs physiques selon la direction (Oz) .

a) En tenant de compte la stationnarité de l'écoulement écrire l'équation du mouvement et l'équation de continuité. Quelle propriété caractéristique de l'écoulement peut-on déduire de l'équation de continuité ? Quelle est la condition aux limites à écrire en $y = 0$ pour le champ de vitesse ? Quelle est l'allure qualitative du champ de vitesse du glacier (ne pas calculer le champ de vitesse) ?

En utilisant l'équation du mouvement projetée selon (Oy) ainsi qu'une condition limite, montrer que la répartition de pression selon y est indépendante de x .

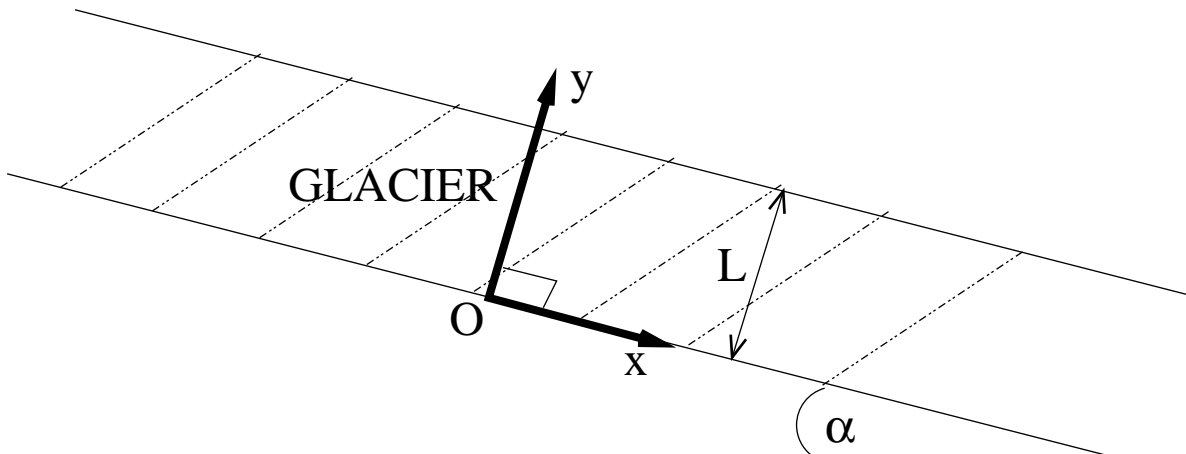


FIG. 1 – Schématisation de la dynamique d'un glacier.

b) Adimensionner l'équation de Navier–Stokes projetée selon (Ox) , en utilisant L et U comme échelles caractéristiques de longueur et de vitesse. Démontrer que l'équation de Navier–Stokes adimensionnée et projetée selon (Ox) se ramène à une équation du type

$$\beta + \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial^2 y^*} = 0,$$

où les grandeurs adimensionnées sont notées avec une étoile et β est une constante que l'on déterminera. Vérifier que β est sans dimension.

c) Quelle est la signification physique du paramètre β ?

d) Comment utiliseriez-vous ce paramètre β pour reproduire expérimentalement en laboratoire l'écoulement d'un tel glacier ?

Exercice 2 – Spectre spatial du champ magnétique terrestre

On rappelle que le champ magnétique terrestre à l'extérieur du noyau terrestre dérive d'un potentiel scalaire magnétique V défini par

$$V(r, \theta, \phi) = r_E \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_E}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta) (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi), \quad (1)$$

où r_E est le rayon de la Terre, n et m désignent le degré et l'ordre de l'harmonique sphérique respectivement, P_n^m sont les polynômes de Legendre et (g_n^m, h_n^m) les coefficients de Gauss.

a) Pourquoi est-il possible d'écrire le champ magnétique terrestre sous la forme d'un potentiel scalaire ? Quelle est la relation entre le champ magnétique \vec{B} et le potentiel scalaire V ?

b) Commenter les 3 cartes de la figure 2. On vous demande notamment d'expliquer les caractéristiques générales du champ magnétique qui ressortent de ces cartes, d'expliquer les différences majeures entre les différentes cartes, d'expliquer brièvement comment elles sont obtenues, avec quelles hypothèses, etc...

c) Le développement en harmoniques sphériques permet aussi d'écrire le champ \vec{B} en un point de l'espace sous la forme :

$$\vec{B} = \sum_{n=1}^N (B_{r,n} \vec{e}_r + B_{\theta,n} \vec{e}_\theta + B_{\phi,n} \vec{e}_\phi) = \sum_1^N \vec{B}_n.$$

Cette décomposition revient à écrire le champ magnétique total en une somme de champs multipolaires : $n = 1$ correspond au champ d'ordre 1 (champ dipôle), $n = 2$ correspond au champ d'ordre 2 (champ quadripôle), etc... N étant le degré maximum jusqu'où l'on cherche à décrire le champ magnétique.

On introduit alors la notion de spectre spatial de \vec{B} défini par l'application :

$$n \rightarrow R(n) = \|B_n\|^2 = \frac{1}{4\pi} \int \int_{S(r)} |\vec{B}_n|^2 dS.$$

On peut démontrer que $R(n)$ est donné, en fonction des coefficients de Gauss, par l'expression

$$R(n) = (n+1) \left(\frac{r_T}{r}\right)^{2n+4} \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2].$$

Le spectre magnétique est introduit pour quantifier l'importance relative des différents degrés (différents n) en terme d'énergie magnétique dans le développement en harmonique sphérique de \vec{B} .

La figure 3 donne le spectre spatial (plus précisément $R(n)^2$) du champ magnétique calculé à la surface terrestre en $r = r_T$ (obtenu à partir des données du satellite Magsat en 1981). Le spectre est représenté jusqu'à $n = 13$ car, au delà, le champ magnétique d'origine crustal interfère avec le champ d'origine interne. Jusqu'au degré $n = 13$, seul le champ magnétique d'origine interne apparaît.

Que remarquez vous concernant le degré $n = 1$? Comment le comprenez-vous ?

Quelle serait l'allure de ce spectre à l'interface Noyau-Manteau ? On vous demande en particulier de dire si la pente du spectre de la figure 3 à l'interface Noyau-Manteau serait accentuée ou diminuée par rapport à la pente à la surface terrestre (réponse qualitative demandée).

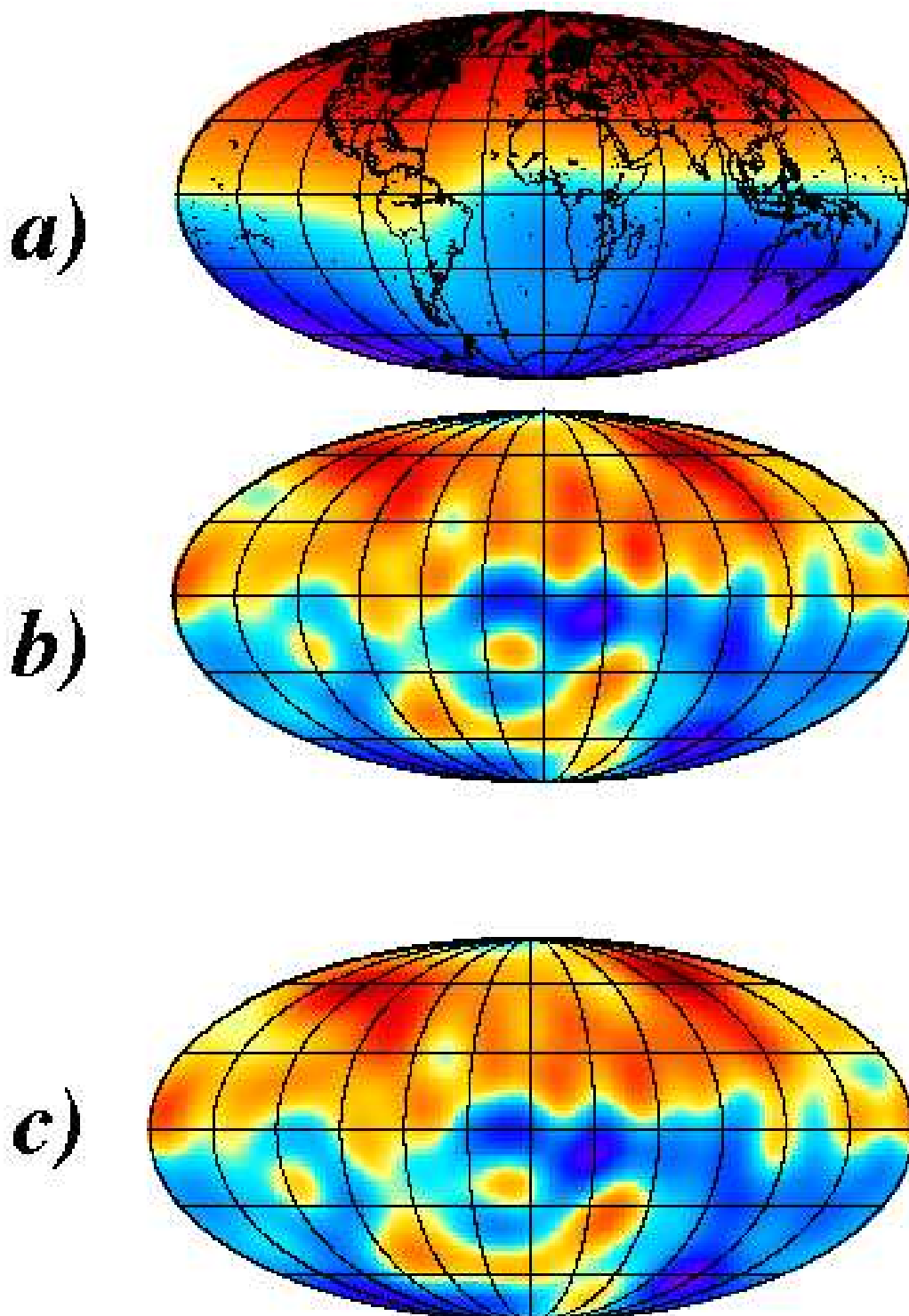


FIG. 2 – a) Composante radiale du champ magnétique mesurée par le satellite Ørsted en 2000, ramenée à la surface terrestre ; b) Composante radiale du champ magnétique mesurée par le satellite Ørsted en 2000, ramenée à la frontière Noyau-Manteau ; c) Composante radiale du champ magnétique mesurée par le satellite Magsat en 1981, ramenée à la frontière Noyau-Manteau. La couleur rouge signifie que le champ mesuré est négatif, la couleur bleue qu'il est positif.

Spectre du champ magnétique terrestre

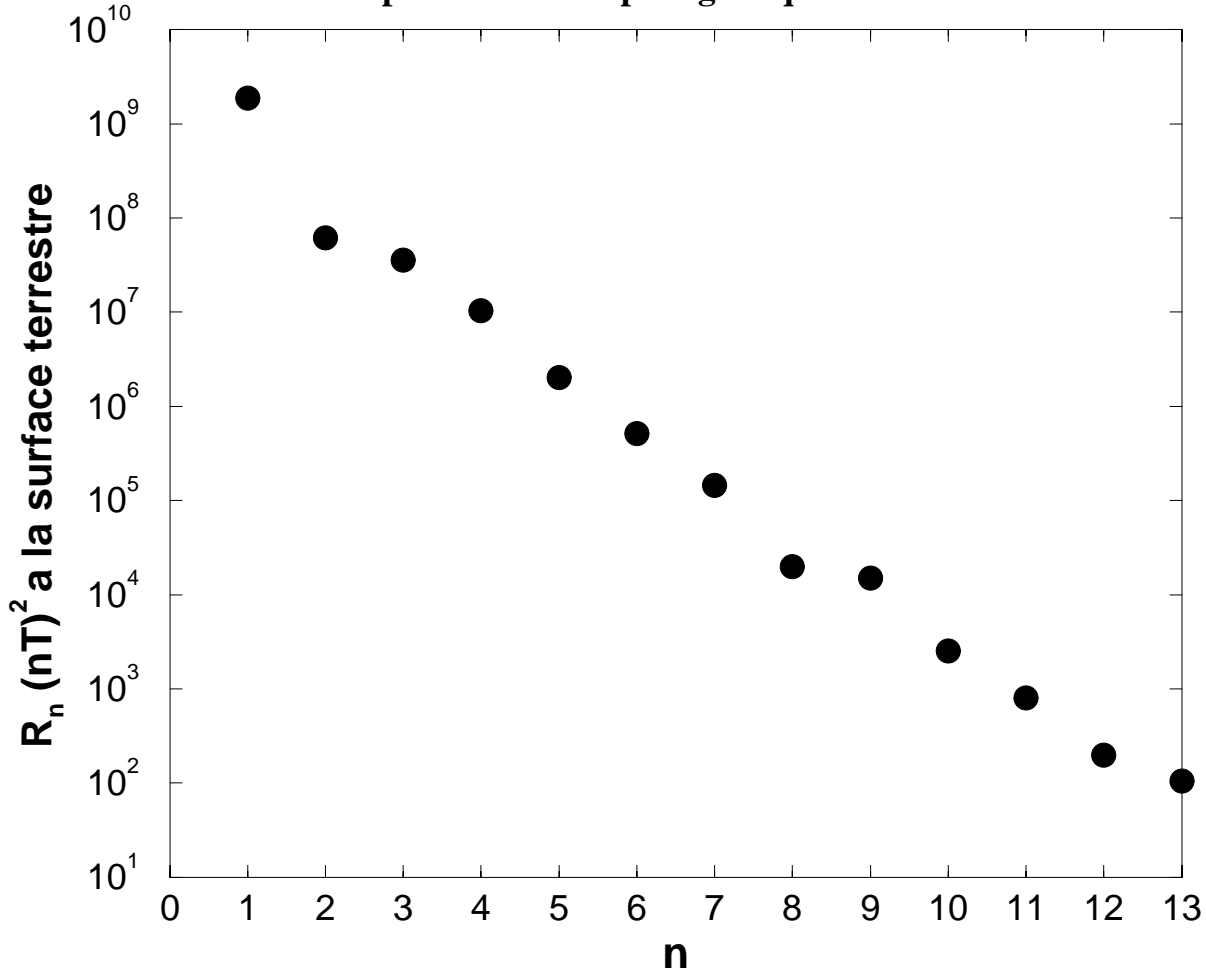


FIG. 3 – Spectre du champ magnétique à la surface terrestre.

Est-ce que les spectres à la surface terrestre (figure 3) et à l'interface Noyau-Manteau (réponse à la question précédente) sont en accord avec les cartes de champ magnétique de la figure 2 (voir question b)) ?

d) Calculer l'intensité du champ dipolaire ($\|B_1\|$) à la surface terrestre.

On utilisera notamment les valeurs des coefficients de Gauss d'ordre 1 données par Magsat $g_1^0 = -29\,775$ nT, $g_1^1 = -1\,851$ nT et $h_1^1 = 5\,411$ nT ($1\text{nT} = 10^{-9}\text{T}$).

On vérifiera que $\|B_1\|$ peut s'écrire aussi en fonction de l'intensité du moment dipolaire \mathcal{M} à l'aide de la relation suivante :

$$\|B_1\| = \frac{\sqrt{2}\mu_0}{4\pi r_E^3} \mathcal{M}, \text{ avec } \mathcal{M} = \frac{4\pi r_T^3}{\mu_0} \left[(g_1^1)^2 + (h_1^1)^2 + (g_1^0)^2 \right]^{1/2}.$$

e) Admettons que pour $n \geq 2$ on peut écrire $R(n)$ sous la forme

$$R(n) = e^{(21.02 - 1.309n)}.$$

Calculer l'intensité du champ non dipolaire

$$\|B_{nd}\| = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \|B_n\|^2 \right)^{1/2}.$$

Remarques : i) pour ce calcul il est plus aisé mathématiquement de faire la somme de tous les degrés n jusqu'à l'infini plutôt que de s'arrêter au degré 13. Du point de vue de la précision du résultat final, cela n'a qu'une incidence marginale dans la mesure où l'essentiel de l'énergie magnétique est contenue dans les termes de bas degrés. ii) Pour calculer l'intensité moyenne du champ non dipolaire, on pourra utiliser le résultat de la suite géométrique suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q^1 + q^2 + q^3 + \dots = \frac{q}{1-q}$$

valable pour tout $|q| < 1$.

On démontrera que :

$$\|B_{nd}\| = \left(e^{21.02} \frac{e^{-2.618}}{1 - e^{-1.309}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Combien vaut le rapport $\|B_1\|/\|B_{nd}\|$?

f) Supposant

- i) que le champ non dipolaire reste constant en moyenne au cours du temps,
- ii) que le moment dipolaire suit la loi de décroissance

$$\mathcal{M}(t) = [8.27 - 4.9 \times 10^{-3}(t - 1900)] \times 10^{22} \text{ Am}^2$$

où t est le temps exprimée en **année**,

iii) qu'il se produit une inversion lorsque le champ dipolaire est du même ordre de grandeur que le champ non dipolaire soit $\|B_1\| \approx \|B_{nd}\|$, estimer la date de la prochaine inversion du champ magnétique terrestre.

Application numérique : $r_E = 6371 \text{ km}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I.}$

Exercice 3 – Tache rouge de Jupiter

La grande tache rouge de Jupiter a été découverte en 1655 par Cassini. Depuis, des missions spatiales ont permis de mieux la connaître : c'est un tourbillon qui, comme un ouragan terrestre, est matérialisé par les masses nuageuses qu'il entraîne. Il leur faut six jours (terrestres) pour faire le tour de la tache dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. La planète fait, quant à elle un tour sur elle-même en dix heures.

On considérera l'atmosphère de Jupiter comme un fluide visqueux, incompressible et isotherme (température constante).

Remarque : L'énoncé contient beaucoup d'informations, relisez-le régulièrement au cours de l'exercice.

a) Calculer Ω la vitesse angulaire de Jupiter puis ω_0 la vitesse angulaire des masses nuageuses autour de la tache.

b) L'extension verticale de l'atmosphère de Jupiter est faible par rapport à sa taille horizontale. On est donc dans un cadre où on peut appliquer l'approximation de couche mince de fluide.

On se donne les grandeurs caractéristiques suivantes pour l'atmosphère de Jupiter : L une longueur caractéristique horizontale, H une longueur caractéristique verticale, U une vitesse caractéristique horizontale et W une vitesse caractéristique verticale.

En utilisant la propriété d'incompressibilité du fluide de l'atmosphère jovienne, montrer comment une des composantes du vecteur vitesse peut être négligée devant les deux autres dans le cadre de l'approximation de couche mince.

c) Écrire l'équation de Navier-Stokes dans le repère en rotation avec la planète Jupiter dans l'hypothèse où le mouvement est stationnaire ($\partial \vec{u} / \partial t = \vec{0}$). On supposera que le gradient de pression $-\vec{\nabla} P$ regroupe la pression, la force centrifuge (liée au changement de repère) et le poids.

Donner la signification physique des différents termes de l'équation.

d) Dans l'équation de Navier-Stokes, quelle est la force qui, comme dans l'atmosphère terrestre, influence les mouvements de grande échelle de l'atmosphère de Jupiter ? Justifier en une phrase.

On considère par la suite que la force liée à la viscosité de l'atmosphère est négligeable dans l'équation de Navier-Stokes précédemment écrite.

e) On s'intéresse maintenant à un calcul d'ordre de grandeur des termes présents dans l'équation de Navier-Stokes obtenue à la question c) puis simplifiée à la question d).

On étudie un tourbillon, par conséquent une longueur caractéristique L appropriée est le rayon du tourbillon et une vitesse caractéristique U appropriée est la vitesse à la périphérie du tourbillon. Comment peut-on relier U , L et ω_0 ?

Montrer maintenant que le terme d'inertie non linéaire peut être négligé devant la force de Coriolis.

On aboutit alors à l'équation qui décrit l'équilibre géostrophique :

$$2\rho \vec{\Omega} \times \vec{u} = -\vec{\nabla} P$$

où \vec{u} représente le vent géostrophique, ici le vent horizontal du tourbillon.

Cette même équation peut se récrire

$$\vec{u} = \frac{1}{2\rho\Omega \sin \varphi} \vec{k} \times \vec{\nabla} P \quad (2)$$

où \vec{k} est le vecteur porté par la verticale locale et φ la latitude.

f) En utilisant la formule (2), montrer à l'aide d'un schéma simple dans quel hémisphère se trouve la tache sachant que contrairement aux cyclones terrestres, la tache rouge de Jupiter correspond à un maximum de pression. On vous demande un schéma du type de ceux décrits lors du TD ④ où figurent \vec{u} , $\vec{\Omega}$ et $\vec{\nabla}P$.

g) Des observations ont montré que la vitesse des vents à la périphérie de la tache est de l'ordre de 350 km/h. La densité moyenne de l'atmosphère jovienne est de l'ordre de $3 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$. La valeur absolue de la latitude moyenne de la tache est $|\varphi| = 22$ degrés et le rayon moyen de celle-ci est de 15 000 km.

En utilisant le modèle développé dans cet exercice, en particulier en utilisant la formule (2), quelle devrait être l'amplitude de la différence de pression ΔP (entre la périphérie et le centre du tourbillon) donnant naissance à des vents d'une telle ampleur. Qu'en pensez-vous ?

Examen – Correction

Jeudi 4 Janvier 2007 – Durée : 3 heures

Exercice 1 – Écoulement d'un glacier

a) On considère un écoulement permanent (indépendant du temps), unidirectionnel (seule la composante u_x est non nulle). La force en volume \vec{F}_V à prendre en compte est le poids $\rho \vec{g}$.
L'équation de Navier–Stokes pour notre problème s'écrit en coordonnées cartésiennes

$$\vec{0} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \vec{\Delta} \vec{u}.$$

On projette cette équation

$$\text{selon } (Ox) \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + \rho g \sin \alpha, \quad \text{selon } (Oy) \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \cos \alpha.$$

L'équation de la conservation de la masse implique $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$, d'où $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0$.

En $y = 0$, le champ de vitesse doit être strictement nul (condition de non-glissement); cela implique $u_x(x, y = 0) = 0 \quad \forall x$.

Qualitativement, la vitesse du fluide doit croître entre $y = 0$ et $y = H$ (voir TD ② pour la solution complète du champ de vitesse).

La projection de Navier–Stokes sur (Oy) nous donne en intégrant $P(x, y) = -\rho g(\cos \alpha)y + C(x) \quad \forall x$ où C est une fonction de x .

A la surface libre, $P(x, h) = P_0 = -\rho g(\cos \alpha)h + C(x)$. On en déduit $C(x) = P_0 + \rho g(\cos \alpha)h$ qui est indépendant de x . En conclusion, $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$.

L'équation de Navier–Stokes selon (Ox) se réduit à

$$\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \rho g \sin \alpha = 0.$$

b) On pose $u_x = U u_x^*$ et $y = L y^*$. On en déduit en utilisant Navier–Stokes selon (Ox)

$$\rho g \sin \alpha + \frac{\mu U}{L^2} \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial y^{2*}} = 0 \Leftrightarrow \frac{L^2 \rho g \sin \alpha}{\mu U} + \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial y^{2*}} = 0$$

Il vient immédiatement que $\frac{L^2 \rho g \sin \alpha}{\mu U}$. En termes d'unités, $[\beta] = \text{m}^2 \text{kg m s} / (\text{m}^3 \text{s}^2 \text{Pa s m})$ qui est bien sans dimension.

c) β quantifie directement le rapport des forces de gravité sur les forces visqueuses.

d) Voir TD ②. Similitude.

Exercice 2 – Spectre spatial du champ magnétique terrestre

a) On peut considérer la basse atmosphère (sous l'ionosphère) et le manteau, au premier ordre, comme isolant électrique. On peut alors utiliser une des équations de Maxwell appliquées à un isolant

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \vec{0}.$$

On en déduit que le champ magnétique à l'extérieur du noyau peut s'écrire sous la forme d'un potentiel scalaire V tel que $\vec{B} = -\text{grad}V$ car $\text{rot} \text{grad}X = \vec{0} \forall X$, X étant un champ scalaire quelconque.

b) cf Cours. La principale information est que le dipôle est bien plus dominant à la surface de la Terre qu'à l'interface Noyau–Manteau.

c) On observe une tendance linéaire décroissante entre les degrés 2 à 13. Le degré 1, lui, se situe au dessus de cette droite. On en conclut qu'à la surface terrestre le degré 1 est bien dominant. À l'interface Noyau–Manteau, le spectre serait plus plat à cause de la dépendance radiale de la fonction spectre : plus n est grand, plus la composante d'ordre n du champ magnétique décroît vite. Donc oui, à l'interface Noyau–Manteau le dipôle est moins dominant et c'est ce qui est vu sur les cartes de la question **b**).

d) Intensité du champ dipolaire :

$$\|B_1\| = (R(1))^{1/2} = \sqrt{2}[(g_1^1)^2 + (h_1^1)^2 + (g_1^0)^2]^{1/2} = \frac{\sqrt{2}\mu_0}{4\pi r_T^3} \mathcal{M} = 42878 \text{ nT}.$$

e) Intensité du champ non dipolaire :

$$\begin{aligned} \|B_{nd}\| &= \left(\sum_{n=2}^{\infty} \|B_n\|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} R_n \right)^{1/2} \simeq \left(\sum_{n=2}^{\infty} e^{21.02-1.309n} \right)^{1/2} = \left(e^{21.02} \sum_{n=2}^{\infty} e^{-1.309n} \right)^{1/2} = \\ &= \left(e^{21.02} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-1.309n} - e^{-1.309} \right)^{1/2} = \left[e^{21.02} \left(\frac{e^{-1.309}}{1 - e^{-1.309}} - e^{-1.309} \right) \right]^{1/2} = \left(e^{21.02} \frac{e^{-2.618}}{1 - e^{-1.309}} \right)^{1/2} = 11596 \text{ nT} \end{aligned}$$

Le rapport $\|B_1\|/\|B_{nd}\| \simeq 42878/11596 \approx 4$.

f) La prochaine inversion aura lieu lorsque $\|B_1(t)\| \simeq \|B_{nd}\|$.

Soit quand

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}\mu_0}{4\pi r_T^3} [8.27 - 4.9 \times 10^{-3}(t - 1900)] \times 10^{22} &= 11596 \times 10^{-9} \\ \Leftrightarrow t &= \left[-\frac{4\pi \times 11596 \times 10^{-9} \times (6.371 \times 10^6)^3}{\sqrt{2}\mu_0 \times 10^{22}} + 8.27 \right] \frac{1}{4.9 \times 10^{-3}} + 1900 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t \simeq 1275 + 1900 = 3175 \text{ ans}$$

Exercice 3 – Tache rouge de Jupiter

a) Jupiter fait un tour en 10 heures :

$$\Omega = 2\pi / (10 * 3600) = 1.75 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s.}$$

Il faut six jours aux masses nuageuses pour faire le tour de la tache :

$$\omega_o = 2\pi / (6 * 24 * 3600) = 1.21 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s.}$$

b) On utilise la conservation de la masse pour un fluide incompressible en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho u_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Nous sommes dans le cadre de l'approximation de couche mince. On suppose que les deux vitesses horizontales u_ρ et u_θ sont du même ordre de grandeur U . En raisonnant en terme d'ordres de grandeur on doit avoir pour assurer l'incompressibilité du fluide : $\frac{U}{L} \sim \frac{W}{H}$.

Or l'énoncé indique que $H \ll L$ ce qui impose $W \ll U$. On peut donc négliger la vitesse verticale devant les vitesses horizontales dans l'équation de Navier-Stokes.

c) L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \left[\left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\Delta} \vec{u}$$

On a, de gauche à droite, le terme d'inertie non-linéaire, l'accélération due à la force de Coriolis, le gradient de pression et la force visqueuse.

d) Cette question est une question de cours. L'atmosphère est un fluide très peu visqueux, c'est donc la force de Coriolis qui va régir la dynamique de grande échelle.

e) On a $U = \omega_0 L$.

Le rapport en ordre de grandeur de la force de Coriolis sur le terme d'inertie non linéaire s'écrit alors :

$$\frac{2\rho\Omega U}{\rho U^2/L} = \frac{2\Omega}{\omega_0} \text{ ou encore } \frac{2\Omega \sin \varphi}{\omega_0}.$$

Application numérique : $\frac{2\Omega}{\omega_0} = 29$. Le terme non linéaire est petit devant Coriolis et l'équation de Navier-Stokes va se résumer par la suite à l'équation de l'équilibre géostrophique.

f) On se rappelle que l'énoncé indique que les vents sont dans le sens trigonométrique, ce qui nous donne la direction du vent géostrophique, il y est aussi indiqué que la tache est un anticyclone. Pour retrouver la relation (2), il faut donc être dans la configuration de la figure 4 c'est à dire dans l'hémisphère Sud. Voir aussi l'exercice 2 du TD ④.

g) On trouve $\Delta P = 610^7$ Pa. Ca peut paraître très grand ! Plusieurs pistes douteuses dans le modèle peuvent amener à un résultat quelque peu approximatif ou peu crédible : densité moyenne sur toute la hauteur H , atmosphère isotherme, termes non linéaire négligés, etc ... Cependant la tache rouge est immense et la pression en surface est déjà importante donc de tels gradients de pression ne sont peut être pas irréalistes.

$\otimes \vec{\Omega}$, Hémisphère Sud

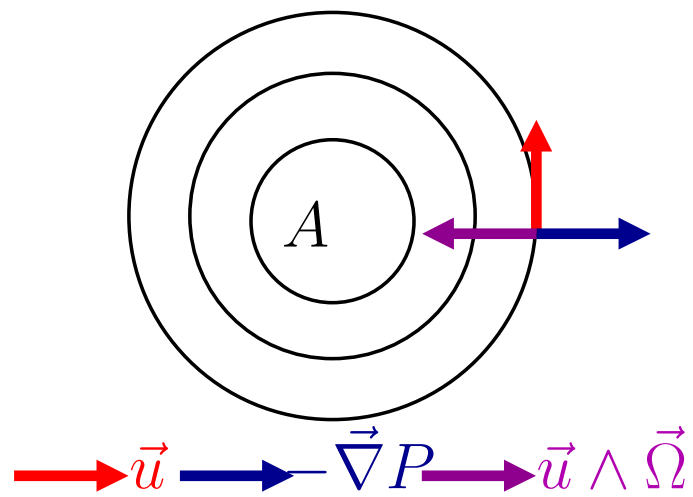


FIG. 4 – Équilibre géostrophique dans l'hémisphère Sud pour un anticyclone.