Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Mécanique des Fluides Géophysiques, 2005/2006

Examen

Jeudi 5 Janvier 2006 – *Durée :* 2 heures 30 minutes

Calculatrice non autorisée. Le formulaire mathématique ainsi que le formulaire donnant l'équation de Navier–Stokes en coordonnées cylindriques et coordonnées sphériques distribués en cours sont les seuls documents autorisés durant l'épreuve.

On vous demande d'être concis, précis et rigoureux dans la réponse aux questions.

Exercice 1 – Géomagnétisme

On vous demande d'expliquer brièvement ce que l'on entend par "effet dynamo".

Pour quelles raisons pense-t-on qu'une dynamo est à l'œuvre dans le noyau terrestre ? Vous pourrez articuler votre demonstration par exemple en calculant le nombre de Reynolds magnétique du noyau et/ou en expliquant pourquoi un aimant permanent ne peut être à l'origine du champ magnétique terrestre.

A. N. : on donne pour le noyau terrestre $\mu_0\sigma = \dfrac{1}{\lambda} \simeq 0.5$ S.I..

Exercice 2 – Vent géostrophique

a) La température d'équilibre du bilan radiatif à la surface de la Terre est, en moyenne sur l'année, de 282 K à l'équateur géographique et de 222 K aux pôles.

L'expression $T_e(\Phi) = T_0 - \Delta T \left(\sin^2\Phi - \dfrac{1}{3}\right)$ fournit une bonne approximation des variations de la température d'équilibre en fonction de la latitude Φ.

Que valent T_0 et ΔT ?

b) On suppose que la température dans l'atmosphère est indépendante de l'altitude z et égale à la température d'équilibre $T_e(\Phi)$ à chaque latitude.

Exprimez la pression dans l'atmosphère $P(\Phi, z)$, en supposant que l'atmosphère se comporte comme un gaz parfait ($P = \rho R T_e(\Phi)$) et qu'elle est à l'équilibre hydrostatique (avec g la gravité indépendante de z). On notera P_s la pression à la surface terrestre, que l'on suppose indépendante de Φ.

c) À l'aide de l'expression de la température d'équilibre donnée en a) et de l'expression de la pression obtenue en b), montrez que

$$\frac{\partial P}{\partial \Phi} = -\frac{2\rho g z \Delta T \cos(\Phi)\sin(\Phi)}{T_e}$$

d) Rappelez en quelques mots ce qu'est l'équilibre géostrophique et donnez l'équation régissant cet équilibre (on notera $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de la Terre). On se placera dans le cadre de l'approximation de couche mince où les vitesses verticales sont négligées devant les vitesses horizontales.

Exprimez u_g et v_g, les composantes selon x et selon y du vent géostrophique, en fonction de $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$ (voir figure 1 pour le repère $(Oxyz)$).

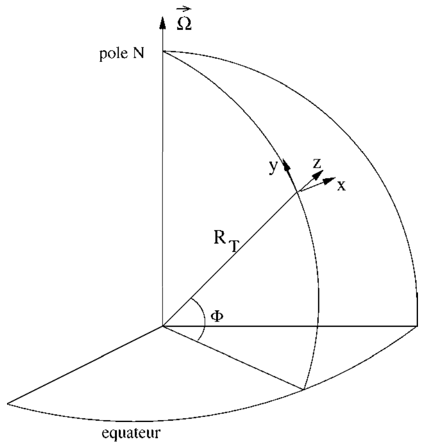

FIG. 1 – Repère de coordonnées utilisé dans l'exercice 2.

e) En utilisant $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{R_T}\frac{\partial P}{\partial \Phi}$, R_T étant le rayon de la Terre, montrez que u_g s'écrit :

$$u_g = \frac{g \Delta T \cos(\Phi) z}{\Omega R_T T_e(\Phi)}.$$

Calculez u_g à $z = 10$ km et à $\Phi = 45°$ et préciser le sens de ce vent.

Obtenez-vous un résultat cohérent avec ce que vous avez appris en cours concernant la circulation atmosphérique aux latitudes moyennes ?

A.N. : Utilisez $g = 10$ m.s^{-2}, $R_T = 6000$ km, et $\Omega = 5.61 \times 10^{-5}$ s$^{-1} \simeq \frac{\sqrt{2}}{252} \times 10^{-2}$ s^{-1}.
On rappelle que $\cos(45) = \sin(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 3 – Montée d'une lave

On étudie la montée d'une lave, considérée comme un fluide incompressible de masse volumique ρ, le long d'une cheminée volcanique cylindrique de longueur h et de rayon R (voir figure 2). La viscosité dynamique μ de la lave est supposée constante et très grande de sorte que l'on peut négliger les termes inertiels (non-linéaire) dans l'équation de Navier-Stokes (écoulement à faible nombre de Reynolds, $Re \ll 1$). La remontée de la lave est due à un gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial z}$ constant entre la base et le sommet de la cheminée ; on supposera ce gradient égal à $\frac{P_0 - P_1}{h}$ où P_0 est la pression atmosphérique à la sortie de la cheminée et P_1 la pression à la sortie de la chambre magmatique comme précisé sur la figure 2.

On résout le problème en coordonnées cylindriques.

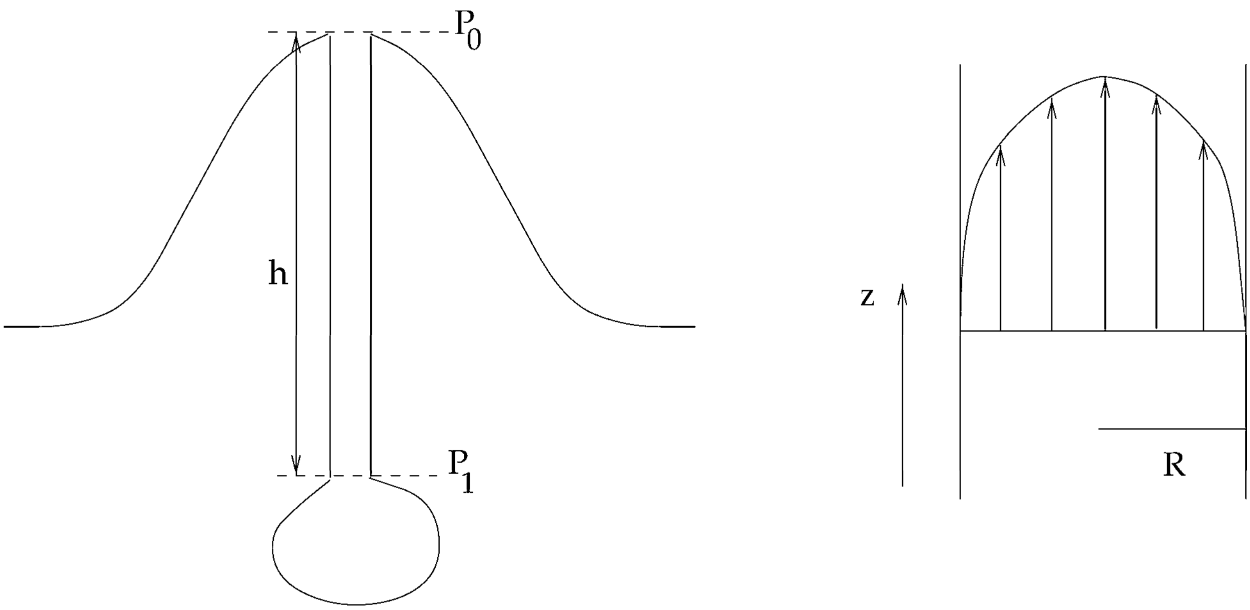

FIG. 2 – *Gauche* : coupe verticale de la cheminée volcanique avec la chambre magmatique à la base. *Droite* : Champ de vitesse indiqué par des flèches au sein de la cheminée.

a) D'après la figure 2, en supposant le champ de vitesse invariant selon la coordonnée θ et en supposant $u_\theta = 0$, comment peut-on simplifier le champ de vitesse

$$\overrightarrow{u}(r,z) = u_r(r,z)\overrightarrow{e_r} + u_z(r,z)\overrightarrow{e_z} \text{ ?}$$

b) En utilisant la condition d'incompressibilité du fluide, montrez à l'aide de l'équation de conservation de la masse que le champ de vitesse ne dépend pas de la variable z.

c) A l'aide de l'équation de Navier-Stokes (on considère un champ de vitesse stationnaire en temps), montrez que la composante u_z du champ de vitesse prend la forme :

$$u_z(r) = \alpha \frac{r^2}{4} + A \ln r + B$$

où α doit être déterminer et A et B sont deux constantes d'intégration.

Pour cette question, il sera judicieux d'utiliser l'expression suivante pour le laplacien de la composante verticale du champ de vitesse

$$\Delta u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}.$$

d) En utilisant les conditions aux limites de l'écoulement, déterminez les valeurs des constantes A et B.

e) Quelle condition doit vérifier α pour que la remontée de la lave soit possible ($u_z > 0$) ? Donnez une interpretation physique à la condition obtenue.

f) Calculez le débit volumique de la lave à travers une section circulaire horizontale (débit à exprimer en km^3/jour) ainsi que la vitesse maximale de la lave (à exprimer en km/heure).

A.N. : R = 10 m, h = 5 km, ρ = 2700 kg.m^{-3}, μ = 2 $\times$ 10^4 Pa.s, g = 10 m.s^{-2}, P_0 = 10^5 Pa, P_1 = 2$\times$10^8 Pa.