Master 1 Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'environnement.

Université Joseph Fourier.

Champs et fluides géophysiques - U.E. TUE408.

Mercredi 25 Mai 2005, 8h30-11h30.

Durée de l'épreuve : **3 heures.**

Le seul document autorisé est le formulaire distribué en cours. Calculatrice autorisée.

I) Questions de cours.

A) Géomagnétisme

1) D'après la partie du cours relative au Géomagnétisme, quelle est la composition du noyau liquide ? Quel est le mécanisme physique qui donne naissance au mouvement du fluide au sein du noyau liquide ?

Le noyau liquide baigne au sein d'un champ magnétique : quels sont les termes supplémentaires qu'il faut ajouter à l'équation de Navier-Stokes et à l'équation de la chaleur liés à la présence de ce champ magnétique ?

2) Quelles sont les caractéristiques principales du champ magnétique observé à la surface terrestre depuis la mise en place des observatoires magnétiques (depuis environ 400 ans) ?

Rappelez brièvement quelles propriétés magnétiques des roches nous permettent de remonter à l'histoire du champ paléomagnétique.

3) Voici l'équation d'induction ci-dessous :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\text{rot}}(\vec{u} \times \vec{B}) + \eta \Delta \vec{B}$$

Donnez la signification physique des trois termes ainsi que les unités de chaque grandeur physique dans cette équation.

Adimensionnez cette équation afin de faire apparaître le nombre de Reynolds magnétique :

$$Re_m = \mu_0 \sigma U L = \frac{UL}{\eta}$$

4) Nous cherchons maintenant à calculer Re_m du noyau terrestre.

Par quel moyen indirect obtient-t-on une valeur caractéristique de la vitesse du fluide dans le noyau terrestre ? Quelle est cette valeur de U ?

Sachant que $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ S.I. et $\sigma \simeq 10^7$ S.I., calculez Re_m pour le noyau liquide. Commentez ce résultat.

B) Dynamique de l'atmosphère

Expliquez et décrivez l'origine de la circulation atmosphérique sous forme de cellule de Hadley (soyez concis, moins d'une page).

II) Montée d'une lave.

On étudie la montée d'une lave, considérée comme un fluide **incompressible** de masse volumique ρ, le long d'une cheminée volcanique cylindrique de **longueur** h et de **rayon** R (voir Figure 15). La viscosité dynamique μ de la lave est supposée constante et très grande de sorte que l'on peut **négliger les termes inertiels** (non-linéaire) dans l'équation de Navier-Stokes (écoulement à faible nombre de Reynolds, $Re \ll 1$). La remontée de la lave est due à un gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial z}$ entre la base et le sommet de la cheminée. On supposera ce gradient constant et égal à $= \frac{P_1 - P_0}{h_1 - h_0} = -\frac{\Delta P}{h}$ où $\Delta P = P_1 - P_0$, P_0 est la pression atmosphérique à la sortie de la cheminée et P_1 la pression à la sortie de la chambre magmatique.
On résout le problème en coordonnées cylindriques.

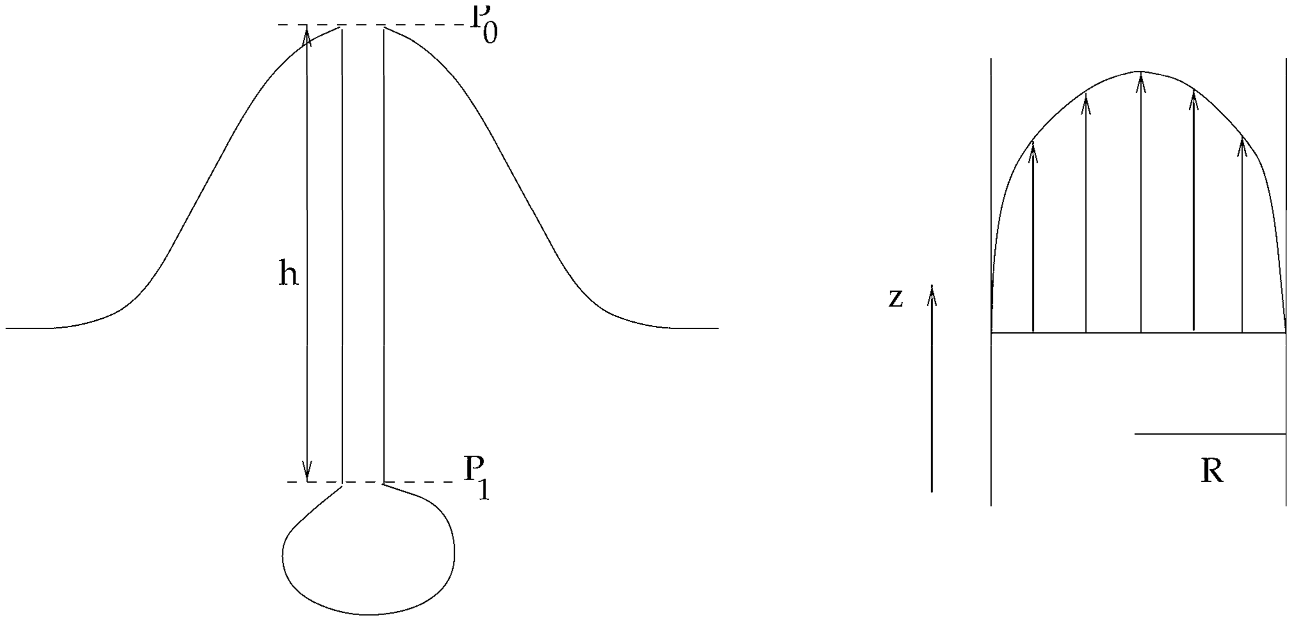

FIG. 15 – *Gauche* : coupe verticale de la cheminée volcanique avec la chambre magmatique à la base. *Droite* : Champ de vitesse indiqué par des flèches au sein de la cheminée.

1) D'après la figure 15, en supposant le champ de vitesse invariant selon la coordonnée θ et en supposant $V_\theta = 0$, comment peut-on simplifier le champ de vitesse

$$\vec{V}(r, z) = V_r(r, z)\vec{e_r} + V_z(r, z)\vec{e_z} \ ?$$

2) En utilisant la condition d'incompressibilité du fluide, montrez à l'aide de l'équation de conservation de la masse que le champ de vitesse ne dépend pas de la variable z.

3) A l'aide de l'équation de Navier-Stokes (on considère un champ de vitesse stationnaire en temps), montrez que la composante V_z du champ de vitesse prend la forme :

$$V_z(r) = \alpha \frac{r^2}{4} + A \ln r + B$$

où $\alpha = \frac{1}{\mu} (\rho g + \frac{\partial P}{\partial z})$, et A et B sont deux constantes d'intégration.

4) En utilisant les conditions aux limites de l'écoulement, déterminez les valeurs des constantes A et B.

5) Quelle condition doit vérifier la constante α pour que la remontée de la lave soit possible ($V_z > 0$). Donnez une interpretation physique à la condition obtenue.

6) Calculez le débit volumique de la lave à travers une section circulaire horizontale (débit à exprimer en kg/jour) ainsi que sa vitesse maximale (à exprimer en km/heure).

$A.N.$ R = 10 m, h = 5 km, ρ = 2700 kg/m^3, μ = 2 10^4 Pa.s, P_0 = 10^5 Pa, P_1 = 2 10^8 Pa.

III) Écoulement autour d'un coin d'huile.

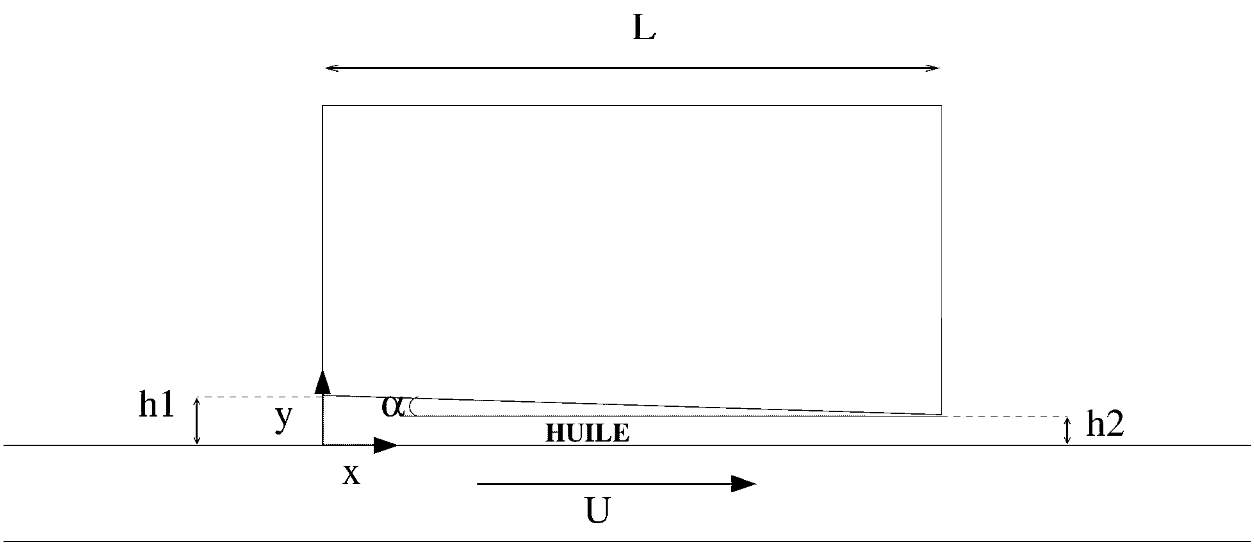

FIG. 16 – Schéma d'un écoulement autour d'un coin d'huile

On considère un écoulement d'huile (fluide **visqueux** et **incompressible**) **stationnaire** en temps et **bidimensionnel** dans un espace étroit tel schématisé sur la figure 16. La paroi supérieure est **fixe** et la paroi inférieure est animée d'une **vitesse U**, entraînant dans son mouvement le fluide visqueux entre les deux surfaces. On note ν la viscosité cinématique, μ la viscosité dynamique et ρ la masse volumique du fluide.

L'origine des x est prise à l'aplomb du bord gauche de la paroi supérieure. Le vecteur vitesse a pour composantes $[u(x, y), v(x, y)]$, la vitesse perpendiculaire au plan (xy) n'étant pas considéré dans cet exercice. La paroi supérieure a une longueur L et est inclinée d'un faible angle α par rapport à l'horizontal. Soit $h(x)$ la distance entre les deux parois : on note $h_1 = h(0)$ et $h_2 = h(L)$.

Le but de l'exercice est de décrire le champ de vitesse entre les deux parois. Pour résoudre ce problème, on suppose de plus que $h_1 \ll L$ ce qui nous place dans le cadre des hypothèses d'un film mince visqueux. On notera P la pression corrigée telle que $-\vec{\nabla} P = -\vec{\nabla} p + \rho\vec{g}$ où p est la pression dynamique et $\vec{g}$ la gravité.

1) En prenant U comme vitesse caractéristique horizontale et V comme vitesse caractéristique verticale, L comme échelle caractéristique horizontale et h_2 comme échelle caractéristique verticale, montrez à l'aide des hypothèses du problème que l'une des vitesses est faible devant l'autre.
On utilisera pour ceci la condition d'incompressibilité du fluide, en calculant les ordres de grandeur des dérivées partielles à l'aide des grandeurs caractéristiques en vitesse et en espace. On aboutira finalement à l'ordre de grandeur de V en fonction de U, L et h, ordre de grandeur que l'on utilisera dans la question 2).

2) Écrire l'équation de Navier-Stokes en tenant compte des hypothèses du problème. On vous donne $\nu = 10^{-3}$ m^2/s, $U = 10$ m/s, $h_2 = 10^{-4}$ m et $L = 10$ cm.

Dans cette question on va chercher à démontrer à l'aide d'arguments dimensionnels que l'on peut négliger les termes inertiels (non-linéaire) dans l'équation de Navier-Stokes dans le cadre des hypothèses du film mince visqueux.

a) Projetez l'équation de Navier-Stokes selon (Ox). Pourquoi peut-on négliger $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ devant $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$?
En utilisant des ordres de grandeur pour les différents termes de l'équation simplifiée, montrez que le

rapport des termes inertiels sur le terme visqueux est de l'ordre de $Re = \frac{Uh^2}{\nu L}$ (nombre de Reynolds).

b) En suivant le même raisonnement qu'en a) et en projetant l'équation de Navier-Stokes selon (Oy), démontrez que l'on obtient la même expression pour le rapport des termes inertiels sur le terme visqueux.

c) En déduire que l'équation de Navier-Stokes dans l'hypothèse du film mince visqueux se réduit à

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

3) En comparant l'ordre de grandeur des termes impliquant la vitesse selon x et selon y dans les deux équations ci-dessus, montrez que la pression corrigée dans le cadre des hypothèses du film fin visqueux ne dépend que d'une seule variable.

4) On peut alors intégrer la première équation de 2 c) et montrer à l'aide des conditions limites que le champ de vitesse est la superposition d'un écoulement de Poiseuille plan (champ de vitesse dont le moteur est $\frac{\partial P}{\partial x}$) et d'un écoulement de Couette plan (champ de vitesse dont le moteur est le déplacement de la plaque inférieure).

5) Est -il envisageable d'utiliser les résultats de cette étude pour certains écoulements géophysiques ? (réponses souhaitées de type qualitatives mais argumentées)