

MASTER 1 DES SCIENCES DE LA TERRE ET DE L'UNIVERS

Année 2006/2007

TUE408 : CHAMPS ET FLUIDES GÉOPHYSIQUES

Formulaire mathématique, travaux dirigés et examens

✉ Daniel.Brito@ujf-grenoble.fr,
👁 LABORATOIRE DE GÉOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE,
MAISON DES GÉOSCIENCES,
BP53, 38041 GRENOBLE CEDEX 09,
☎ 04 76 82 80 42.

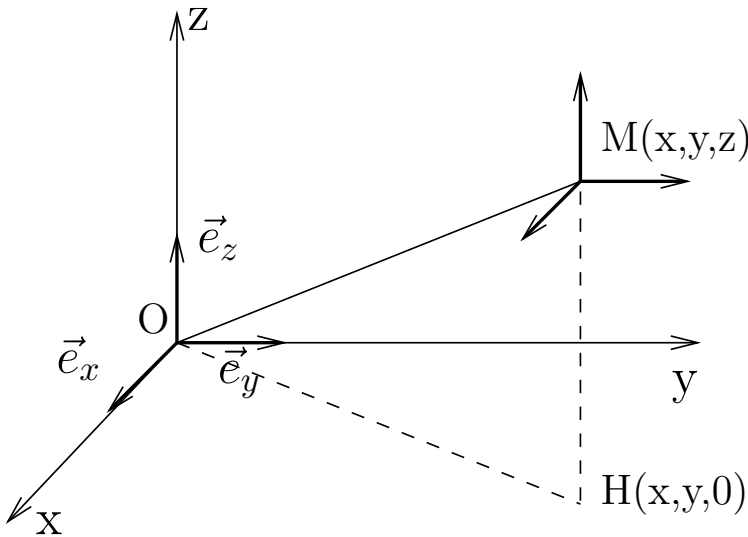


Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

TD Formulaire Mathématique

Opérateurs en coordonnées cartésiennes (x, y, z)



$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{\nabla} P = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\text{div}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

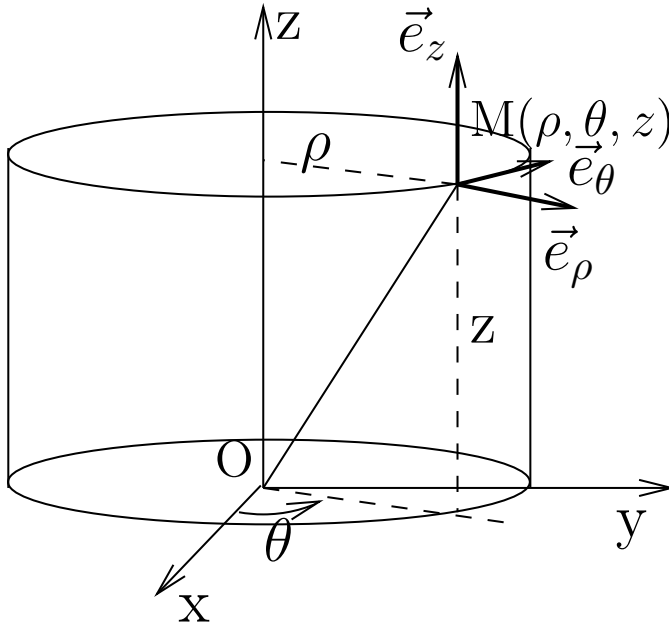
$$\overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} = \vec{\nabla} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\Delta T = \vec{\nabla}^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta} \vec{u} = \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

Opérateurs en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z)



$$\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

$$dV = \rho dr d\theta dz$$

$$\vec{\text{grad}} P = \vec{\nabla} P = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{bmatrix}$$

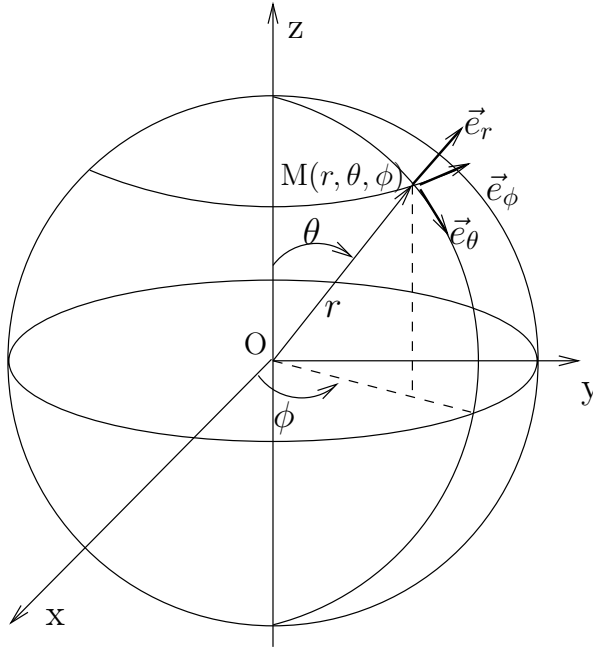
$$\text{div } \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho u_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{grad}} \vec{u} = \vec{\nabla} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{\rho}, & \frac{\partial u_\rho}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho}, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho}, & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial \rho}, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \vec{\text{rot}} \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\rho}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho u_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

$$\Delta T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} - \frac{u_\rho}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial z^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u_\rho - \frac{u_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \\ \Delta u_z \end{bmatrix}$$

Opérateurs en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)



$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{\nabla} P = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

$$\text{div}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}$$

$$\vec{\nabla} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}, & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi \cot \theta}{r} \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial r}, & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta}, & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \end{pmatrix} \quad \vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_\phi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

$$\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$$

$$\vec{\Delta} \vec{u} = \begin{bmatrix} \Delta u_r - \frac{2}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta u_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}$$

Si le champ de vecteur \vec{u} est axisymétrique : $u_r(r, \theta)$, $u_\theta(r, \theta)$ et $u_\phi = 0$

$$\vec{\Delta} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Relations entre vecteurs

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

Relations entre opérateurs vectoriels

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} T) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \Delta \vec{u}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\Delta \vec{u}) = \Delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

$$\vec{\nabla}(A \cdot B) = A\vec{\nabla}B + B\vec{\nabla}A$$

$$\Delta(AB) = A\Delta B + 2(\vec{\nabla}A) \cdot (\vec{\nabla}B) + B\Delta A$$

$$\vec{\nabla} \cdot (A\vec{u}) = A\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}A$$

$$\vec{\nabla} \times (A\vec{u}) = A\vec{\nabla} \times \vec{u} + (\vec{\nabla}A) \times \vec{u}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

Formes intégrales

Théorème de Gauss : l'intégrale de la divergence d'un vecteur sur un volume est égale à l'intégrale du flux sortant sur la surface fermée de ce volume.

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{u} dV = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dV = \oiint_S \vec{u} \cdot \vec{dS}$$

Théorème de Stokes : l'intégrale du rotationnel d'un vecteur sur une surface quelconque est égale à la circulation sur le contour fermé de cette surface.

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{u} \cdot \vec{dS} = \oint_C \vec{u} \cdot \vec{dl}$$

Décomposition d'un vecteur

Un champ vecteur \vec{u} quelconque peut se décomposer en la somme du gradient d'un potentiel scalaire U et du rotationnel d'un potentiel vecteur $\vec{\Psi}$:

$$\vec{u} = -\vec{\nabla}U + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}$$

Si la divergence de \vec{u} est nulle alors :

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}$$

Si le rotationnel de \vec{u} est nul alors :

$$\vec{u} = -\vec{\nabla}U$$

Equation de Navier–Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\Delta} \vec{u} + \vec{\mathcal{F}}$$

En coordonnées cartésiennes (x,y,z)

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \mathcal{F}_x \text{ selon } (Ox), \\ \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \mathcal{F}_y \text{ selon } (Oy), \\ \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \mathcal{F}_z \text{ selon } (Oz). \end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \mathcal{F}_r \text{ selon } (Or), \\ \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \mathcal{F}_\theta \text{ selon } (O\theta), \\ \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \\ &\quad + \mathcal{F}_z \text{ selon } (Oz). \end{aligned}$$

En coordonnées sphériques (r, θ, φ)

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) &= \\ -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\Delta u_r - 2 \frac{u_r}{r^2} - 2 \frac{\cotan \theta}{r^2} u_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) &+ \mathcal{F}_r \text{ selon } (Or), \\ \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cotan \theta}{r} \right) &= \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) &+ \mathcal{F}_\theta \text{ selon } (O\theta), \\ \rho \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\theta u_\phi \cotan \theta}{r} \right) &= \\ -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \mu \left(\Delta u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) &+ \mathcal{F}_\phi \text{ selon } (O\phi). \end{aligned}$$

Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

TD ① Statique des fluides

Exercice 1 – Stabilité statique de l'atmosphère sèche

On considère une parcelle de fluide de masse m à la pression P_0 et à la température T_0 que l'on amène rapidement à la pression P et à la température T . Cette opération est supposée suffisamment rapide pour que la particule fluide n'ait pas le temps d'échanger de chaleur avec l'atmosphère ambiante et on peut donc la considérer comme **adiabatique** (ou isentropique). Dans la question a) on réalisera que la valeur d'une grandeur physique, *la température potentielle*, reste inchangée pendant cette opération. Dans b) on calculera explicitement la variation de température de la parcelle pendant cette opération en supposant qu'on se trouve dans un milieu à l'équilibre hydrostatique : la variation de température suit le *gradient adiabatique*. Dans c) et d) on appliquera nos calculs au cas de l'atmosphère et on discutera en particulier de la dynamique d'une telle parcelle qui suit un déplacement isentropique. On supposera dans cet exercice que la parcelle de fluide est un **gaz parfait**.

a) On rappelle que l'entropie d'un gaz parfait en fonction de la température T et de la pression P s'écrit comme suit :

$$s = \frac{C_p}{m} \ln T - \frac{R}{m} \ln P + K$$

où K est une constante. On introduit les paramètres $\gamma = R^*/C_p^*$, où $C_p^* = C_p/m$ est la chaleur massique à pression constante et $R^* = R/m$, où $R = 8.314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits. Montrer que la température potentielle définie comme :

$$\theta = T \left(\frac{P_0}{P} \right)^\gamma \quad (1)$$

reste égale à la température T_0 si on déplace une parcelle de fluide d'un gaz parfait de (P_0, T_0) à (P, T) adiabatiquement.

b) La température potentielle de la parcelle est inchangée mais la température quant à elle varie. En partant de l'équilibre hydrostatique du milieu dans lequel se trouve la parcelle, utiliser l'expression de T obtenue en a) afin de démontrer que le gradient adiabatique Γ que suit la particule prend la forme :

$$\Gamma = \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{g}{C_p^*} \quad (2)$$

où z est l'altitude et $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.

Dans ce calcul, on utilisera et on démontrera que pour une mole d'un gaz parfait :

$$P = \rho R^* T$$

où ρ est la masse volumique de fluide.

c) L'atmosphère présente un gradient vertical de température constant et égal à Γ_A différent du gradient adiabatique Γ . Sachant que la particule fluide est entourée d'une atmosphère ambiante à la température T_A , montrer que l'équation du mouvement vertical de la parcelle de fluide s'écrit :

$$\ddot{z} = \frac{(\Gamma - \Gamma_A)}{T_A} z g \quad (3)$$

d) Discuter alors la stabilité de l'atmosphère. Montrer en particulier qu'il existe un régime d'oscillation à une période T_{osc} que l'on précisera.

Exercice 2 – Stratification verticale de l'océan

a) Écrire l'équation du mouvement vertical pour une parcelle d'eau de mer de masse volumique ρ déplacée de sa position dans un environnement de masse volumique ambiante ρ_A .

b) On assimile le fluide océanique à un fluide incompressible, ce qui signifie que la masse volumique de l'eau de mer (ainsi que sa température) ne varie pas avec la pression. Dans ce cas, la masse volumique du fluide océanique peut s'écrire :

$$\rho_A = \rho_0 + \alpha T + \beta S \quad (4)$$

où S est la salinité (masse de sel/masse d'eau), et α et β deux paramètres.

En vous basant sur votre sens physique, donner le signe des paramètres α et β .

c) A l'aide de la question **a)**, exprimer l'accélération de la parcelle en fonction de sa position z et du gradient ambiant de masse volumique $\frac{\partial \rho_A}{\partial z}$.

d) En utilisant l'équation (4), trouver les conditions de stabilité de l'océan.

Exercice 3 – Manipulation d'Opérateurs mathématiques

Soit un champ scalaire $A(x, y, z) = 3x - z^2$ et un champ vectoriel $\vec{u} = (7y - 4x^2)\vec{e}_x - (3z^2 + 4y + 5x)\vec{e}_y - (8z^3 - 6y^2)\vec{e}_z$.

Soit un champ scalaire $A(r, \theta, z) = r \sin^2 \theta$ en coordonnées cylindriques et un champ vectoriel $\vec{u}(r, \theta, z) = (r \cos \theta)\vec{e}_r + (z^2)\vec{e}_\theta$ également en en coordonnées cylindriques.

1) Calculer $\nabla A = \vec{\text{grad}} A$, $\nabla \cdot \vec{u} = \text{div } \vec{u}$, $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \text{rot } \vec{u}$ et $\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{u} = \vec{\Delta} \vec{u}$

2) Vérifier la formule de la divergence du produit d'un scalaire A par un vecteur \vec{u}

$$\vec{\nabla} \cdot (A \vec{u}) = A \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} A$$

3) Vérifier que Div laplacien = laplacien div, soit :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\Delta} \vec{u}) = \Delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

4) Calculer $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{u}$.

Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

TD ② Équation générales de la mécanique des fluides

Rappel de Cours

Équation de la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \vec{u})$$

Si le fluide est incompressible, ρ est une constante, et :

$$\text{div}(\vec{u}) = 0$$

Équation de la conservation de la quantité de mouvement

L'équation de Navier–Stokes s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \text{div}(\vec{\sigma}') + \vec{\mathcal{F}}_V$$

ou

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\Delta} \vec{u} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \text{div} \vec{u} + \vec{\mathcal{F}}_V$$

où ζ est une viscosité de volume non considéré dans notre cours.

Dans le cas d'un fluide incompressible newtonien et à viscosité constante,

$$\text{div}(\vec{\sigma}') = \mu \vec{\Delta} \vec{u}.$$

L'équation de Navier–Stokes par unité de volume se simplifie en :

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\Delta} \vec{u} + \vec{\mathcal{F}}_V}$$

où \vec{u} est le champ de vitesse du fluide, ρ est la masse volumique du fluide, P est la pression dynamique du fluide, \vec{g} est le champ de gravité, μ est la viscosité dynamique du fluide et $\vec{\mathcal{F}}_V$ sont les forces qui s'exercent sur le volume considéré (par exemple $\rho \vec{g}$).

Exercice 1 – Écoulement d'un fluide visqueux le long d'une pente

On étudie l'écoulement d'un fluide incompressible de viscosité dynamique μ et de masse volumique ρ sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On suppose que l'écoulement est stationnaire, unidirectionnel (selon Ox) et confiné sur une épaisseur h (voir figure 1). La pression à la surface libre est supposée égale à P_0 .

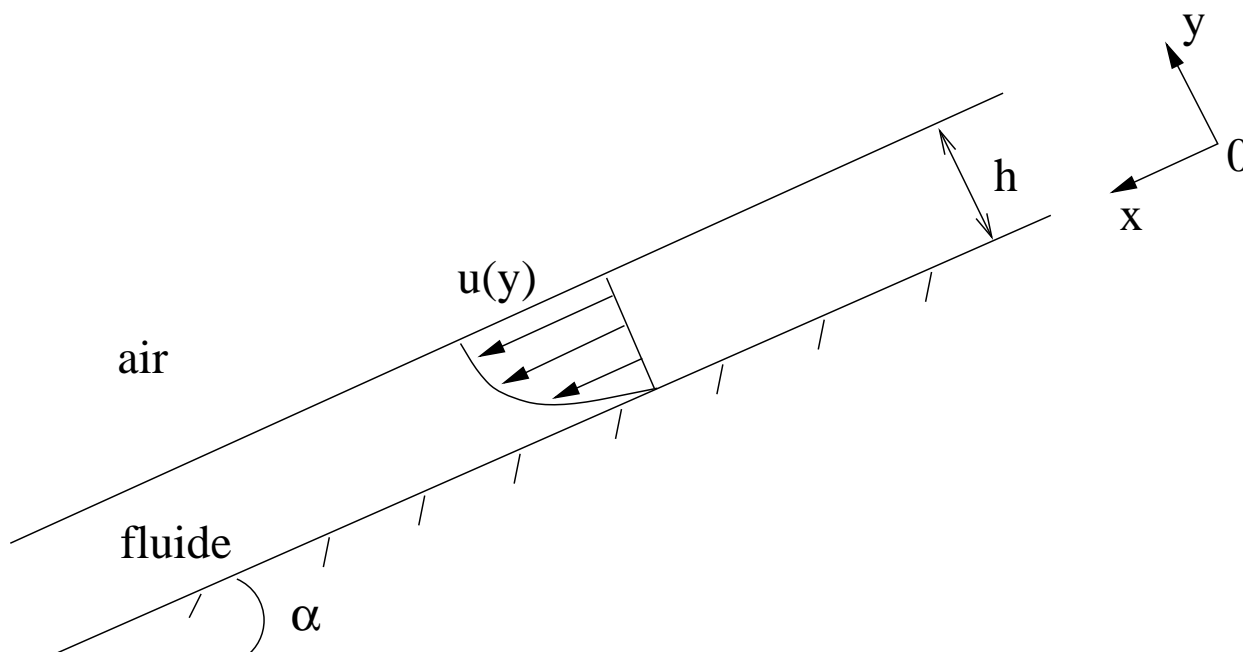


FIG. 1 – Coupe du plan incliné.

- En utilisant l'équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible, montrer que l'écoulement ne dépend pas de x . On notera donc le champ de vitesse sous la forme $u(y)$.
- En écrivant l'équation de la dynamique, montrer que la pression P est indépendante de x .
- Au vu de la question précédente, donner l'équation différentielle vérifiée par $u(y)$ et régissant le mouvement du fluide suivant la direction (Ox) .
- Les conditions aux limites vérifiées par l'écoulement sont les suivantes :
 - le fluide est immobile en $y = 0$.
 - aucune contrainte ne s'exerce à la surface du fluide en $y = h$: ceci se traduit par

$$\frac{\partial u|_{y=h}}{\partial y} = 0.$$

En tenant compte de ces conditions aux limites, intégrer l'équation obtenue en 3) pour en déduire le champ de vitesse $u(y)$.

- Calculer le débit de l'écoulement à une travers une surface de largeur unitaire ($z = 1$) dont la normale est suivant \vec{e}_x .

Exercice 2 – Écoulement dans un cylindre

On se propose ici d'étudier l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique de rayon R et longueur L ($L \gg R$). Pour cela nous ferons les hypothèses suivantes, le fluide est incompressible, de viscosité cinématique ν et masse volumique homogène ρ , l'écoulement est supposé laminaire (pas de terme non linéaire). Le mouvement du fluide dans la conduite est imposé par une différence de pression stationnaire appliquée à ses deux extrémités : $\Delta P = P_A - P_B$. Le gradient de pression est constant : $\frac{P_A - P_B}{L} = \frac{\partial P}{\partial x}$.

- a) Quel est le système de coordonnées le plus approprié pour traiter le problème ?
- b) Le système est-il invariant suivant certaines directions ? Qu'en déduisez vous sur les dérivées ? De quelles variables d'espace dépend alors le champ de vitesse ?
- c) Écrire l'équation de conservation de la masse. En utilisant la condition aux limites en $r = R$, en déduire que $u_r = 0$.
- d) Peut-on faire l'hypothèse d'un écoulement stationnaire en temps ?
- e) La seule force extérieure étant suivant (Ox) , il n'existe aucun forçage pouvant entretenir un mouvement du fluide suivant e_θ . Le fluide étant visqueux, toute composante initiale de vitesse u_θ sera dissipée au-delà d'un certain temps par frottement visqueux. Nous allons donc considérer $u_\theta = 0$. Écrire et projeter suivant les trois axes l'équation de Navier-Stokes.
- f) En imposant que la vitesse doit rester bornée en tout point de l'espace, déterminer l'expression de la vitesse en fonction du rayon cylindrique en résolvant l'équation différentielle obtenue à la question 5).
- g) Calculer le débit Q dans la section du tube.

On suppose maintenant qu'à l'amont de cette conduite se trouve un réservoir de rayon R_1 (avec $R \ll R_1$) rempli à une hauteur $h(t)$ telle qu'à tout temps ($R \ll h(t)$). On suppose que R_1 est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer, à chaque instant, l'écoulement dans la conduite comme un écoulement de Poiseuille circulaire permanent (*i.e.* celui que l'on vient de déterminer).

- h) Déterminer ΔP en fonction de $h(t)$, en supposant le réservoir dans un régime hydrostatique (l'extérieur du système est à la pression P_0).
- i) Donner une autre expression du débit et en déduire une équation différentielle en $h(t)$.
- j) Déterminer h en fonction de t, g, ν, L, R, R_1 et h_0 (hauteur initiale).

Application numérique : en prenant $R = 1$ mm, $R_1 = 5$ cm, et $L = 50$ cm, sachant qu'il a fallu 4000 secondes pour que le niveau du réservoir baisse de $h_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ m à $h = 2.5 \cdot 10^{-2}$ m, déterminer la viscosité cinématique ν du fluide et la comparer à celle de l'eau.

Exercice 3 – Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds Re est défini comme le rapport des termes inertiels sur les termes visqueux.

a) Dans le cas de l'océan ou l'atmosphère, Re est-il très petit ($Re \ll 1$) ou très grand ($Re \gg 1$) ? Vous justifierez brièvement votre réponse.

b) Même question en ce qui concerne le manteau terrestre.

On se propose maintenant d'estimer les valeurs de Re pour les milieux précédemment cités.

On rappelle l'équation de Navier–Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{u}$$

On note L et U_0 respectivement une longueur et une vitesse caractéristiques de l'écoulement.

c) Construire un temps caractéristique t_0 .

d) Donner l'ordre de grandeur de $\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ et $\mu \Delta \vec{u}$ en fonction de ρ , μ , L , U_0 et t_0 .

e) En déduire que $Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} = \frac{U_0 L}{\nu}$.

f) Calculer Re pour :

- le manteau terrestre : $L \simeq 2900$ km, $U_0 \simeq 1$ cm/an, $\rho \simeq 5000$ kg/m³ et $\mu \simeq 10^{21}$ Pa.s,
- l'atmosphère : $L \simeq 20000$ km, $U_0 \simeq 450$ m/s, $\nu \simeq 1.4 \cdot 10^{-5}$ m²/s (on rappelle que $\nu = \mu/\rho$), et comparer avec vos prédictions de la question 1).

Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

TD ③ Dynamique du manteau

Exercice 1 – Validité d'un modèle de circulation dans le manteau supérieur ?

On suppose qu'une plaque lithosphérique rigide se déplace en surface avec une vitesse purement horizontale. Ce déplacement s'accompagne d'un mouvement de retour juste sous la lithosphère comme schématisé sur la figure 1. On fait l'hypothèse que la lithosphère est une plaque rigide de hauteur L se déplaçant avec une vitesse u_0 . L'asthénosphère supposée incompressible (sous la lithosphère) a pour épaisseur h et pour viscosité dynamique μ . A la base de l'asthénosphère, on suppose que le manteau est au repos (vitesse nulle). Par souci de simplification, on ne prend pas en compte les forces d'origine thermique dans ce problème.

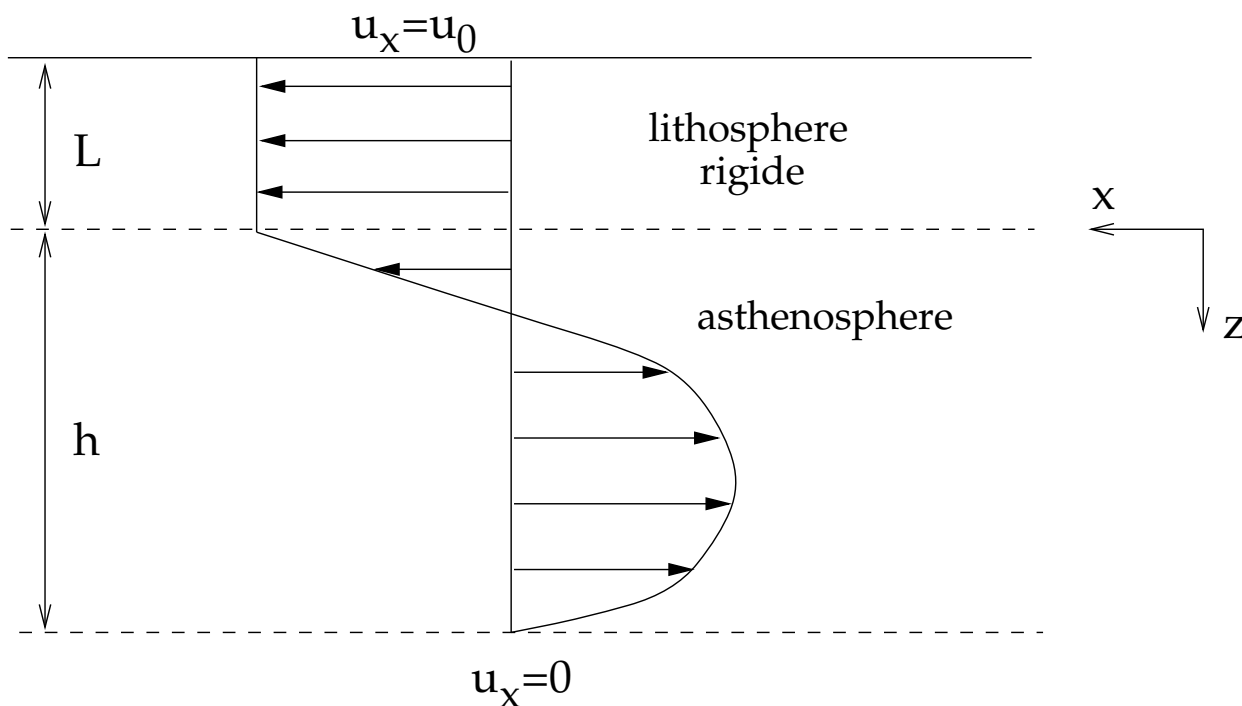


FIG. 1 – Illustration de l'écoulement lithosphérique.

a) Écrire l'équation de Navier–Stokes pour l'écoulement dans l'asthénosphère pour $0 \leq z \leq h$ (on supposera comme toujours dans le manteau que $Re \ll 1$). En déduire l'expression de la vitesse en fonction de gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial x}$ (supposé constant) en utilisant les conditions aux limites en vitesse.

b) Écrire la condition de conservation de la masse dans l'écoulement considéré, en écrivant que dans le système (lithosphère + asthénosphère) la quantité de matière dans la direction $+x$ doit être équilibrée par une quantité équivalente dans la direction $-x$. On supposera que la masse volumique lithosphérique égale la masse volumique asthénosphérique. En déduire $\frac{\partial P}{\partial x}$ puis la vitesse en fonction de z . Remarquez que le profil de vitesse est indépendant de la viscosité asthénosphérique.

rique.

c) On fait l'hypothèse dans cette question que le gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial x}$ résulte d'une surpression en $x > 0$ et d'une dépression en $x = 0$: ce scénario pourrait prendre place si l'on a une dorsale médio-océanique « lente » en $x = 0$. Dans ce type de dorsale, les mesures bathymétriques indiquent en effet une vallée axiale profonde à l'aplomb de la dorsale. La pression croissante pour $x > 0$ serait due à une augmentation de la topographie ($d - h_e$) quand on s'éloigne de la dorsale, d étant la profondeur de l'eau à la dorsale et h_e la profondeur de l'eau pour $x > 0$ comme schématisé sur la figure 2. On suppose $d - h_e \ll L$ où L (la géométrie de l'écoulement ne change pas).

Calculer la pression $P(x)$ pour $z = 0$; on supposera pour cela que la pression est la somme de la « colonne » d'eau et de la « colonne » lithosphérique. En déduire $\frac{\partial P}{\partial x}$ en fonction de ρ_m , ρ_e , g et $h_e(x)$.

d) En déduire la variation de la topographie $\frac{dh_e(x)}{dx}$ en utilisant b) et c).
Qu'en concluez vous ?

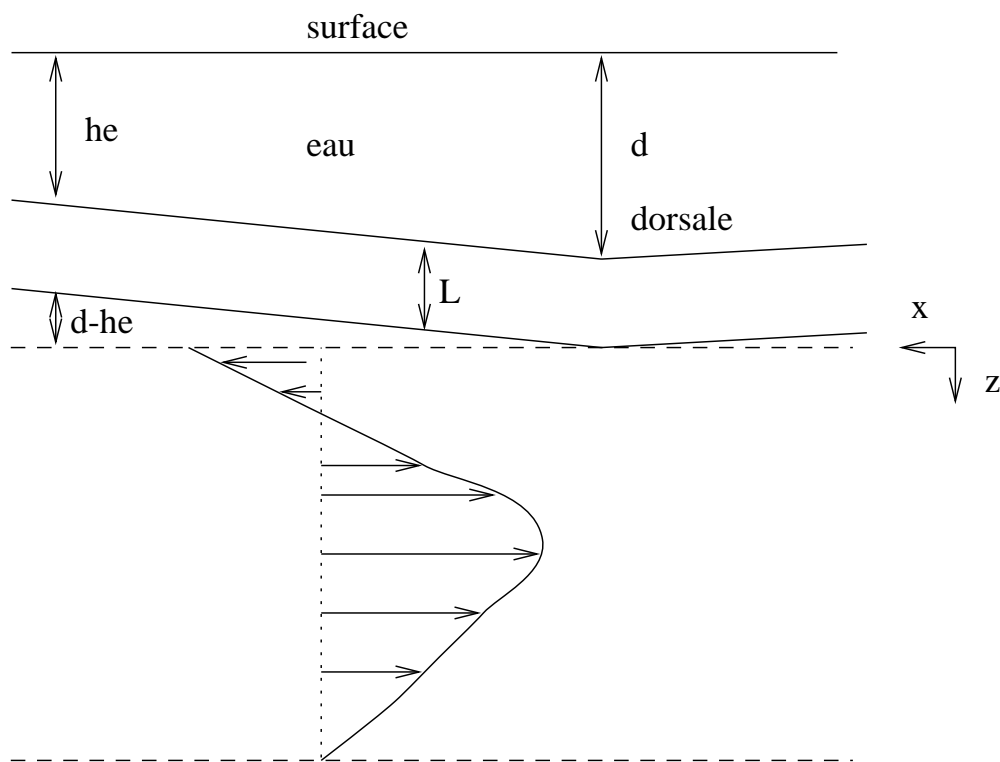


FIG. 2 – Schématisation d'une dorsale médio-océanique lente avec une vallée axiale.

e) Calculer la différence de hauteur ($d - h_e$) entre la dorsale en $x = 0$ et une distance $x = 5000$ km pour les paramètres lithosphériques donnés ci-dessous.

A.N. : $\rho_m = 3300 \text{ kg/m}^3$, $\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3$, $L = 100 \text{ km}$, $h = 200 \text{ km}$, $\mu = 4.10^{19} \text{ Pa.s}$, $u_0 = 5 \text{ cm/an}$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Exercice 2 – Thermiques et panaches dans le manteau

Considérons une sphère de rayon a et de masse volumique ρ plongée au sein d'un fluide au repos et de masse volumique uniforme ρ_0 .

a) Dans la situation décrite ci-dessus, quelles forces subit la sphère ? Peuvent-elles mettre en mouvement la sphère ?

Le système étant invariant horizontalement, dans quelle direction le mouvement de la sphère s'effectuera-t-il ?

b) Donner l'expression de la poussée d'Archimède s'exerçant sur la sphère. (Attention aux unités : on doit trouver une expression homogène à celle de la force visqueuse donnée ci-après).

En supposant que le mouvement de la sphère résulte de l'équilibre entre la poussée d'Archimède et la force visqueuse ($F_\mu = 4\pi a \mu u$ avec u la vitesse verticale de la sphère, μ la viscosité de l'encaissant), déterminer la vitesse de la sphère en fonction de a , ρ_0 et ρ , μ et g .

c) On se place maintenant dans le contexte du manteau terrestre. On se propose d'étudier la vitesse de remontée d'un panache (composé d'une tête et d'un conduit comme schématisés sur la figure 3). On ne considère pas dans cette question l'effet du conduit du panache.

Considérons le cas d'un panache thermique dont le déficit de masse volumique est dû à une température plus élevée de ΔT par rapport au manteau environnant. Exprimez la masse volumique du panache ρ en fonction de ΔT , de ρ_0 (la masse volumique du manteau) et du coefficient de dilatation thermique α du manteau.

Calculez u avec, $\alpha = 3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\Delta T = 500 \text{ K}$, $\rho_0 = 4000 \text{ kg m}^{-3}$, $a = 300 \text{ km}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, $\mu = 10^{22} \text{ Pa s}$.

Que pensez-vous de cette valeur ?

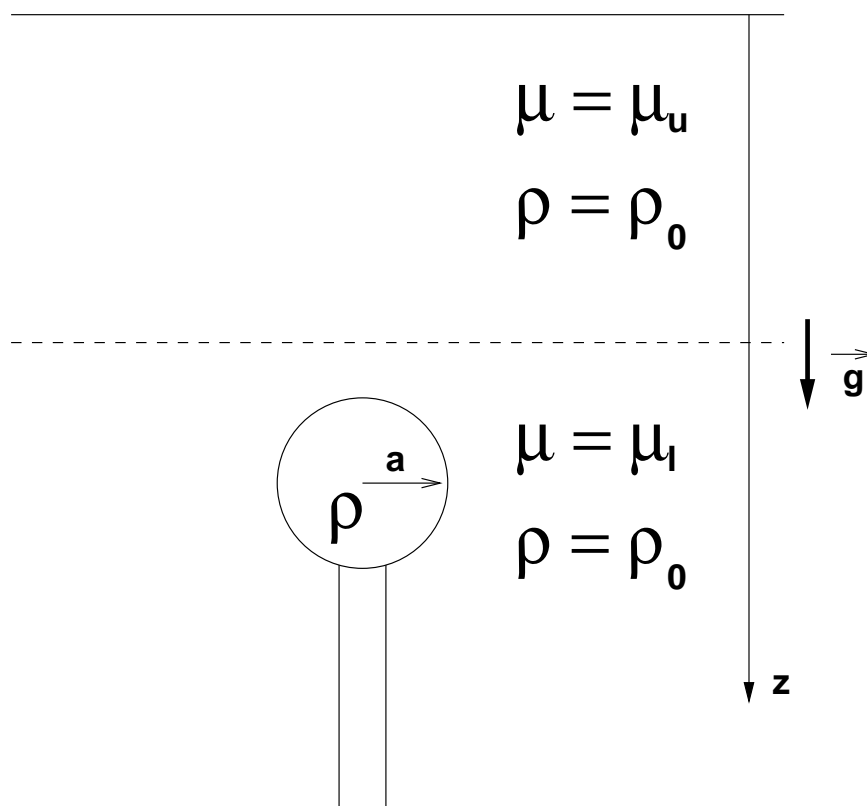


FIG. 3 – Tête de panache thermique et son conduit.

d) Donner l'expression du nombre de Reynolds associé au mouvement de la tête du panache thermique.

Quelle est sa valeur numérique ? En conclure que l'équation de départ qui gouverne le mouvement de la tête est justifiée.

e) On s'intéresse maintenant au conduit du panache thermique. Sachant que le mouvement du fluide au sein du conduit est aussi contrôlé par l'équilibre entre la flottabilité et le frottement visqueux sur les bords du conduit ($F_\mu = 2\pi\mu_p u_p L$, avec μ_p la viscosité du fluide dans le panache, R le rayon du conduit, L sa longueur et u_p la vitesse dans le panache), déterminer la vitesse u_p en fonction de ρ et ρ_0 , μ_p , R , g (A noter qu'on recherche ici une valeur « moyenne » intégrée de la vitesse, on ne cherche pas à résoudre l'écoulement même au sein du conduit).

Exprimer u_p en fonction du flux volumique Q dans le conduit.

f) On se place maintenant à un temps t_0 où les caractéristiques du panache sont les suivantes : $L = 200$ km et $R = 10$ km. Vérifier que le volume du conduit est négligeable devant celui de la tête.

En supposant un débit volumique Q constant entre les temps 0 et t_0 , utiliser la conservation du volume pour obtenir le rayon de la tête en fonction du temps de montée. Pour cela, on supposera que le volume de la tête est initialement nul et que la vitesse de la montée de la tête u est constante. Dans un second temps, exprimer le flux Q en fonction du rayon de la tête et de la distance L depuis l'origine du panache.

g) On suppose que la tête du panache continue à monter à la vitesse u constante à travers le manteau inférieur. Considérons maintenant le cas du panache qui passe du manteau inférieur (viscosité μ_i) au manteau supérieur (viscosité μ_s). Nous rappelons qu'il y a un changement de phase des roches du manteau à cette interface et que la viscosité est plus faible dans le manteau supérieur que dans le manteau inférieur. Exprimer le rapport entre la vitesse u de la tête qui vient de passer dans le manteau supérieur et celle du conduit encore dans le manteau inférieur.

A.N. : $\mu_p/\mu_i = 0.1$, $\mu_s/\mu_i = 1/30$, épaisseur du manteau inférieur $L = 2200$ km, $a=300$ km.

Quelle interprétation avez-vous du résultat ?

Bibliographie

Bercovici, D. and Mahoney, J., 1994. Double flood basalts and plume head separation at the 660-kilometer discontinuity. *Science*, 266 : 1367-1369.

Exercice 3 – Écoulement d'un glacier

On considère l'écoulement permanent d'un glacier, un fluide que l'on considérera newtonien, visqueux, isotherme, incompressible. Le glacier se situe sur une montagne assimilée à un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On note ρ la masse volumique du fluide et μ sa viscosité dynamique.

La surface libre du glacier est supposée à hauteur constante L et la pression P_0 est constante sur cette surface. On suppose que la vitesse du glacier est en tout point parallèle à (Ox) (voir figure 1). On considère un problème bidimensionnel selon (Ox) et (Oy) uniquement, en supposant que l'on n'a pas de variation selon (Oz) .

a) En tenant de compte la stationnarité de l'écoulement écrire l'équation du mouvement et l'équation de continuité. Quelle propriété caractéristique de l'écoulement peut-on déduire de l'équation de continuité ? Quelle est la condition aux limites à écrire en $y = 0$ pour le champ de vitesse ? Quelle est l'allure qualitative du champ de vitesse du glacier (ne pas calculer le champ de vitesse) ?

En utilisant l'équation du mouvement projetée selon (Oy) ainsi qu'une condition limite, montrer que la répartition de pression selon y est indépendante de x .

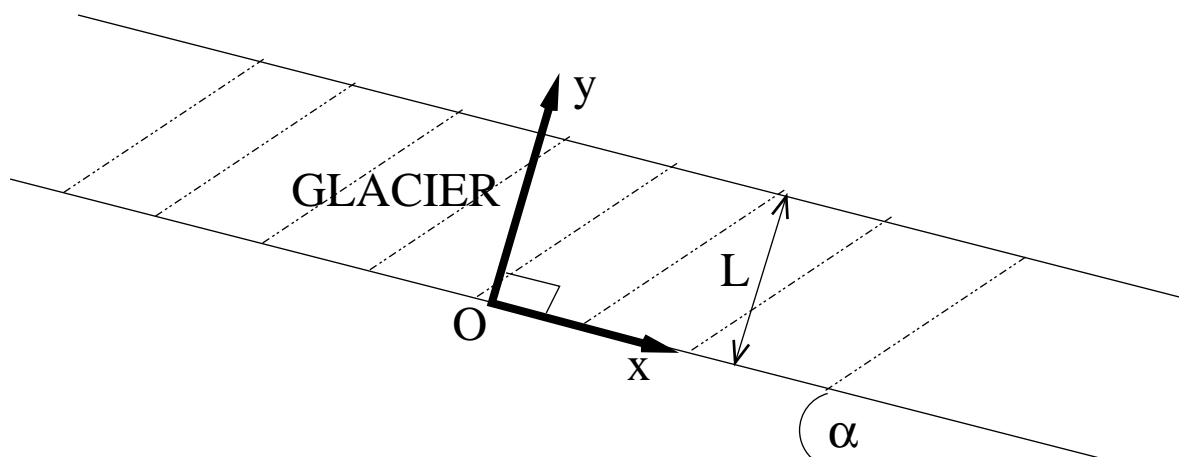


FIG. 4 – Dynamique d'un glacier.

b) Adimensionner l'équation de Navier–Stokes projetée selon (Ox) , en utilisant L et U comme échelles caractéristiques de longueur et de vitesse.

c) Démontrer que l'équation de Navier–Stokes adimensionnée et projetée selon (Ox) se ramène à une équation du type

$$\beta + \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial^2 y^*} = 0$$

où les grandeurs adimensionnées sont notées avec une étoile et β est une constante que l'on déterminera. Vérifier que β est sans dimension.

d) Quelle est la signification physique de ce paramètre β ?

On décide alors de réaliser en laboratoire une maquette au 1/1000 du glacier que l'on désire étudier, avec une pente accentuée d'un facteur 15 tel que $(\sin(\alpha') = 15 \sin(\alpha))$. On utilise comme fluide analogue de la glace de la glycérine dont la masse volumique est identique et la viscosité 10^6 fois plus faible que celle de la glace. On mesure une vitesse caractéristique d'écoulement de $3 \cdot 10^{-6}$ m/s.

e) On utilise maintenant *le principe de similitude d'écoulement* (maquette et objet réel obéissent à la même équation dynamique) et on conclut que β doit être constant dans l'expérience et dans le glacier. Comment comprenez-vous cette conclusion ?

Quelle vitesse moyenne d'écoulement peut-on en déduire pour le glacier ?

f) Un objet est tombé dans une crevasse du glacier. Il est impossible d'aller récupérer celui-ci. On se demande alors au bout de combien de temps cet objet réapparaîtra-t-il au front du glacier, en supposant que l'objet est entraîné par le mouvement du glacier selon (Ox) et que le front du glacier correspond à la zone de fonte de glacier.

Pour répondre à cette question, on place un traceur dans la glycérine, à une position approximativement identique à la position correspondante de l'objet dans le glacier. L'expérience sur maquette nous donne un temps de réapparition de 24 heures. Qu'en déduisez-vous sur le temps de récupération de l'objet au front du glacier ?

Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

TD ③bis – Stabilité linéaire d'un écoulement convectif 2D

Analyse de stabilité linéaire pour le seuil de la convection thermique dans une couche chauffée par le bas.

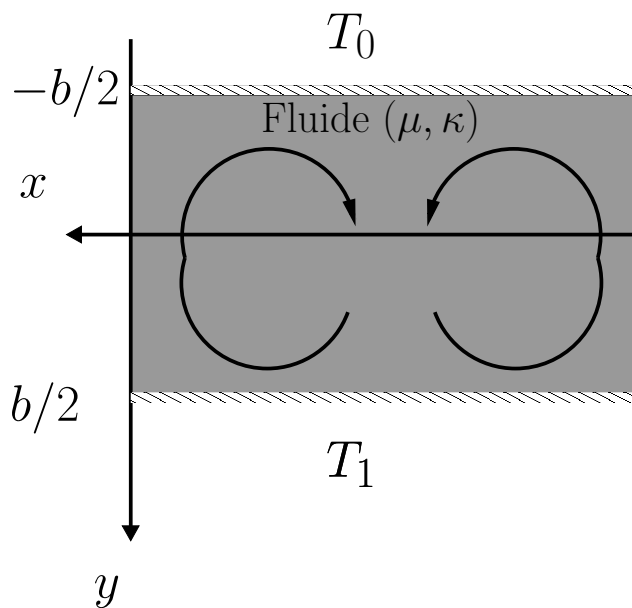
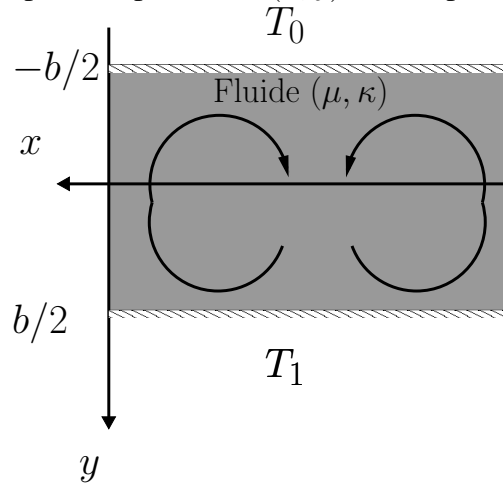


FIG. 1 – Cellule de convection bidimensionnelle avec une couche de fluide chauffée par le bas à une température constante T_1 , la température supérieure étant constante aussi à T_0 , telles que $T_1 > T_0$.

On considère une couche de fluide chauffée par le bas en $y = b/2$ à une température T_1 et refroidie par le haut en $y = -b/2$ à une température T_0 . On suppose qu'il n'y a pas de source de production de chaleur interne au sein du fluide ($A = 0$ dans l'équation générale de la chaleur). Les forces d'Archimède vont induire de la convection thermique au sein de la couche lorsqu'on aura excédé le nombre de Rayleigh critique : le fluide chaud près du bas de la couche remonte et inversement, le fluide froid, près du haut tend à descendre comme schématisé sur la figure 1.

On se propose de **calculer le nombre de Rayleigh critique pour lequel la convection démarre** : en effet, la convection ne démarre que lorsque les forces visqueuses qui s'opposent au mouvement deviennent plus petites que la poussée d'Archimède.

On suppose un écoulement bidimensionnel, avec des vitesses contenues dans le plan (Oxy) et un écoulement infini selon la direction z , si bien que l'on considère le champ de vitesse $\vec{u} = (u_x(x, y), u_y(x, y))$ et le champ de température $T(x, y)$ dans le problème.



Les équations générales qui régissent le problème que l'on veut étudier sont l'équation de Navier–Stokes et l'équation de la chaleur :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{u} + \vec{\mathcal{F}}_v$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T \right) - \kappa \Delta T = \frac{A}{\rho C_p} = 0$$

L'équation de la chaleur se réécrit dans notre cas particulier bidimensionnel (il faut développer en particulier $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T$) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} - \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1)$$

En absence de convection, le fluide est au repos et l'équation de la chaleur (1) se simplifie en

$$\frac{dT_c^2}{dy^2} = 0$$

où $T_c(y)$ est le profil conductif solution. Le profil linéaire de température s'obtient en intégrant deux fois l'équation précédente et en utilisant les conditions limites $T_c(b/2) = T_1$ et $T_c(-b/2) = T_0$. On obtient

$$T_c(y) = \frac{T_1 + T_0}{2} + \frac{T_1 - T_0}{b} y,$$

un profil linéaire en y comme attendu dans le cas conductif.

Au seuil de convection, lorsque les premiers mouvements infinitésimaux apparaissent, on peut récrire :

$$T' = T - T_c = T - \frac{T_1 + T_0}{2} - \frac{T_1 - T_0}{b} y$$

où T' , l'écart de température par rapport au profil conductif, demeure infiniment petit : la température ne s'écarte que très peu du profil conductif au seuil de convection.

De même, les vitesses u'_x et u'_y apparaissant au seuil de convection sont infiniment petites.

On réécrit l'équation de la chaleur (1) en remplaçant T par $T'(x, y) + T_c(y)$, équation de la chaleur valable pour le seuil de convection :

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u'_x \frac{\partial T'}{\partial x} + u'_y \frac{\partial T'}{\partial y} + u'_y \frac{(T_1 - T_0)}{b} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

Puisque les termes T' , u'_x , u'_y sont petits, les termes non-linéaires dans l'équation ci-dessus $u'_x \partial T' / \partial x$ et $u'_y \partial T' / \partial y$ sont très petits par rapport aux autres termes. L'équation (2) se réduit à l'ordre dominant à :

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u'_y \frac{(T_1 - T_0)}{b} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Enlever les termes non-linéaires est une pratique courante en mathématique lorsqu'on étudie la stabilité d'un système : on appelle cette approche **analyse de stabilité linéaire** (ou marginale), valide tant que les perturbations T' , u'_x , u'_y restent infiniment petites, ce qui est vrai dans notre cas puisqu'on est au seuil de convection.

On peut maintenant écrire les équations pour de petites perturbations en température T' , en vitesse u'_x , u'_y et en pression P' quand le fluide devient instable :

$$\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_y}{\partial y} = 0, \text{ conservation de la masse.} \quad (4)$$

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y^2} \right), \text{ Navier-Stokes selon } Ox. \quad (5)$$

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial y} - \rho_0 \alpha g T' + \mu \left(\frac{\partial^2 u'_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'_y}{\partial y^2} \right), \text{ Navier-Stokes selon } Oy. \quad (6)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u'_y \frac{(T_1 - T_0)}{b} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right), \text{ équation de la chaleur.} \quad (7)$$

À noter dans ce système :

- le gradient de pression hydrostatique disparaît de (6). Au départ en effet, avec l'équilibre hydrostatique durant l'état conductif, on a $-\vec{\nabla} P + \rho_0 \vec{g} = \vec{0}$. Au seuil de convection, on introduit $P = P_0 + P'$. On réécrit alors

$$-\vec{\nabla} (P_0 + P') + \rho_0 [1 - \alpha(T - T_c)] \vec{g} \Leftrightarrow -\vec{\nabla} P' - \rho_0 \alpha T' \vec{g}$$

- à cause de la petitesse de Re au seuil, le premier membre de Navier-Stokes ($\rho D \vec{u}' / Dt$) est négligé dans les premiers membres des équations (5) et (6).

Afin de compléter la mise en équation, on précise maintenant **les conditions aux limites** du problème :

- on suppose que les deux surfaces en haut et en bas sont isothermes et qu'il n'y a pas de vitesse verticale du fluide au niveau de ces surfaces, soit

$$T' = u'_y = 0 \text{ en } y = \pm \frac{b}{2}, \forall x. \quad (8)$$

- on suppose que les deux surfaces sont « libres », la vitesse u'_x peut y être différentes de 0. C'est la contrainte τ_{yx} qui s'exerce sur le fluide en $y = \pm b/2$ qui doit être nulle, soit :

$$\frac{\partial u'_x}{\partial y} + \frac{\partial u'_y}{\partial x} = 0 \text{ en } y = \pm \frac{b}{2}. \quad (9)$$

Nous avons le système (4–9) à résoudre.

Afin de simplifier la résolution des équations (4–7) couplées aux conditions limites (8–9), nous introduisons maintenant la notion de **fonction courant**. Dans le cas particulier des écoulements bidimensionnels, l'équation de la conservation de la masse

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

est automatiquement satisfaite si on introduit une fonction courant $\Psi(x, y)$ telle que

$$u_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ et } u_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (10)$$

En effet, dans ce cas, l'équation de la conservation de la masse se réduit à :

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0, \forall \Psi.$$

L'avantage d'introduire cette fonction courant lorsque l'écoulement s'y prête est que l'on a une seule fonction à résoudre $\Psi(x, y)$ et non plus deux $u_x(x, y)$ et $u_y(x, y)$ pour déterminer le champ de vitesse complet. On résout alors Ψ partout dans l'espace, puis on utilise (10) pour retrouver les composantes u_x et u_y .

On utilise pour notre résolution la fonction courant Ψ telle que $u'_x = \partial \Psi' / \partial y$ et $u'_y = \partial \Psi' / \partial x$. L'équation (4) est automatiquement satisfaite et on réécrit les équations (5–7) de la manière suivante :

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^3 \Psi'}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Psi'}{\partial y^3} \right) \quad (11)$$

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial y} - \rho_0 \alpha g T' + \mu \left(\frac{\partial^3 \Psi'}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Psi'}{\partial y^2 \partial x} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{1}{b} (T_1 - T_0) \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right) \quad (13)$$

On peut maintenant s'affranchir de la pression P' ci-dessus en dérivant l'équation (11) par rapport à y et en la retranchant à la dérivée de l'équation (12) par rapport à x .

On obtient

$$0 = -\rho_0 \alpha g \frac{\partial T'}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^4 \Psi'}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi'}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \Psi'}{\partial y^4} \right) \quad (14)$$

Notre problème se résume maintenant à la résolution de deux équations (13) et (14) avec les conditions aux limites (8) et (9).

Les équations (14) et (13) étant linéaires, on utilise la méthode des variables séparés pour les résoudre. Les conditions aux limites (8) et (9) sont satisfaites si l'on cherche des solutions du type :

$$\Psi' = \Psi'_0 \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) e^{\alpha' t} \quad (15)$$

$$T' = T'_0 \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) e^{\alpha' t} \quad (16)$$

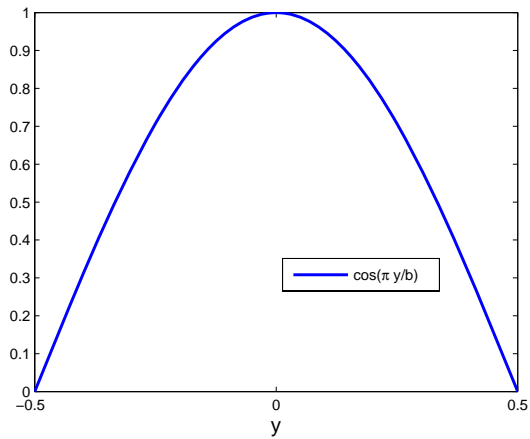


FIG. 2 – $\cos[(\pi y)/b]$ tracée pour $b=1$.

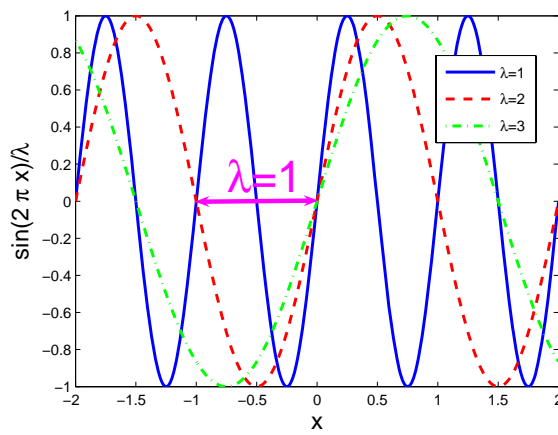


FIG. 3 – $\sin[(2\pi x)/\lambda]$ tracées pour $\lambda=1, 2$ et 3 .

En y , les conditions limites sont respectées par la fonction tracée sur la figure 2. Dans la direction horizontale x , les vitesses et température décrites par ces équations sont des perturbations dans la direction horizontale avec des longueurs d'onde λ comme schématisé sur la figure 3 : on a en effet $F(x) = \cos\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x\right] = F(x + n\lambda) = \cos\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(x + n\lambda)\right]$. Les amplitudes maximales des perturbations sont données par Ψ'_0 et T'_0 .

Des représentations de Ψ' et T' (en ne prenant pas en compte la dépendance temporelle et les amplitudes Ψ'_0 et T'_0) sont faites sur les figures 4 et 5 pour des perturbations de longueur d'onde $\lambda = 1$. On a également représenté les vecteurs vitesse \vec{u} sur la figure 5 déduit de la fonction courant Ψ en utilisant (10) : on constate bien que le champ de vitesse est déphasé par rapport au champ de température d'une demi-longueur d'onde. Le fluide monte pour des zones « chaudes » et descend pour des zones « froides ».

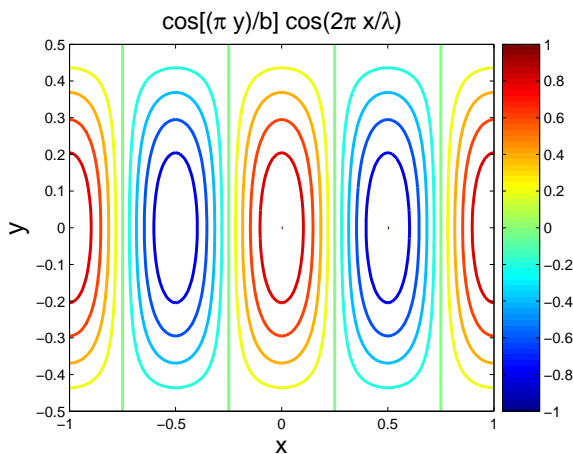


FIG. 4 – Contours des lignes d'égales valeurs de la fonction $\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Champ de température pour $b = 1, \lambda = 1$.

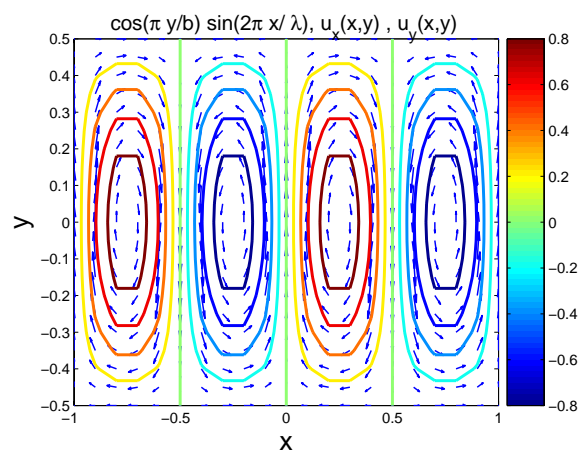


FIG. 5 – Contours des lignes d'égales valeurs de la fonction courant $\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ et vecteurs vitesse obtenues en calculant explicitement $u_x = -\partial\Psi/\partial x$ et $u_y = \partial\Psi/\partial y$. $b = 1, \lambda = 1$.

Le signe de α' détermine si les perturbations vont croître dans le temps ou non . Pour $\alpha' > 0$, les perturbations vont croître et le système sera instable du point de vue de la convection, alors que pour $\alpha' < 0$, le système sera stable et la convection ne se développera pas.

On peut déterminer α' en utilisant les formulations (15) et (16) dans les équations (13) et (14). On obtient alors les deux équations suivantes :

$$\left(\alpha' + \frac{\kappa\pi^2}{b^2} + \frac{\kappa 4\pi^2}{\lambda^2}\right) T_0' = -\frac{(T_1 - T_0) 2\pi}{\lambda b} \Psi_0' \quad (17)$$

$$\mu \left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right)^2 \Psi_0' = -\frac{2\pi}{\lambda} \rho_0 g \alpha T_0' \quad (18)$$

On peut alors s'affranchir des amplitudes maximales Ψ_0' et T_0' en divisant ces deux équations entre elles. On peut alors isoler la valeur de α' :

$$\alpha' = \frac{\kappa}{b^2} \left[\left(\frac{\rho_0 g \alpha b^3 (T_1 - T_0)}{\mu \kappa} \right) \left(\frac{\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2}}{\left(\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} + \pi^2 \right)^2} \right) - \left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right) \right]. \quad (19)$$

On peut conclure déjà ici que le taux de croissance adimensionné $\alpha' b^2 / \kappa$ ne dépend que de deux quantités, $2\pi b / \lambda$, un nombre d'onde adimensionné ainsi que du nombre de Rayleigh qui apparaît sous sa forme connue :

$$Ra = \frac{\rho_0 g \alpha b^3 (T_1 - T_0)}{\mu \kappa}.$$

On réécrit alors l'équation (19) en terme de Rayleigh :

$$\frac{\alpha' b^2}{\kappa} = \frac{Ra \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} - \left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^3}{\left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^2} \quad (20)$$

Le dénominateur de (20) étant toujours positif, le taux de croissance α' est positif et il y a instabilité si

$$Ra > \frac{\left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^3}{\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2}}. \quad (21)$$

De même, le taux de croissance est négatif et l'écoulement est stable lorsque le nombre de Rayleigh Ra est inférieur au membre de droite de (6).

La convection se met en place lorsque précisément $\alpha' = 0$ ce qui se traduit par

$$Ra = Ra_c = \frac{\left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^3}{\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2}}. \quad (22)$$

Ce nombre de Rayleigh est le nombre de Rayleigh critique que nous recherchions : si $Ra < Ra_c$, les perturbations en température et en vitesse décroissent au cours du temps ; si $Ra > Ra_c$, les perturbations en température et en vitesse vont croître exponentiellement dans le temps.

Il est clair à travers l'expression (22) que Ra_c est une fonction de la longueur d'onde (ou du nombre d'onde) de la perturbation. La figure 6 illustre comment Ra_c dépend du nombre d'onde adimensionné $2\pi b / \lambda$: si Ra et le nombre d'onde de la perturbation sont tels que l'on se situe au

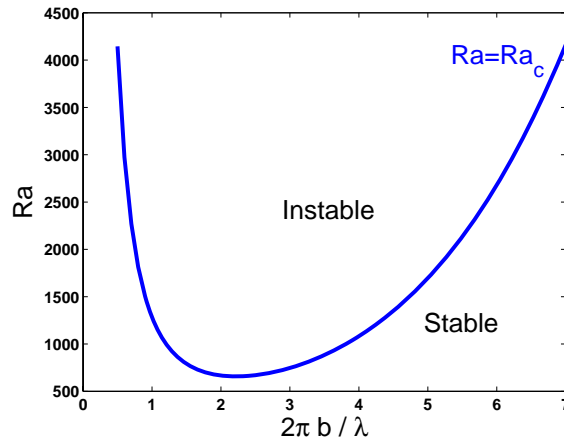


FIG. 6 – Nombre de Rayleigh critique Ra_c obtenue dans l'équation (22) dans le cas d'une couche de fluide chauffée par le bas, avec des conditions de surface libre. Ra_c représenté en fonction du nombre d'onde adimensionné $2\pi b/\lambda$.

dessus de la ligne Ra_c , la perturbation de longueur d'onde λ est instable. À un nombre de Rayleigh donné, il y a convection ou non selon la longueur d'onde de la perturbation. Il existe cependant une valeur minimum $\min(Ra_c)$ en dessous duquel le système ne peut pas convecter : si on se situe sous ce minimum, toutes les perturbations vont décroître dans le temps.

La valeur précise du nombre de Rayleigh minimum s'obtient en dérivant l'expression (22) par rapport à $2\pi b/\lambda$ et en cherchant la dérivée nulle, soit :

$$\frac{\partial Ra_c}{\partial \left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)} = \left[\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} 3 \left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^2 2 \left(\frac{2\pi b}{\lambda} \right) - \left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^3 2 \left(\frac{2\pi b}{\lambda} \right) \right] \left(\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^{-2} = 0 \quad (23)$$

On en déduit que $\frac{2\pi b}{\lambda} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ annule la dérivée dans (23).

La conclusion de ce calcul est que la longueur d'onde correspondant au plus petit nombre de Rayleigh critique est $\lambda = 2\sqrt{2}b$. Injectant cette valeur dans l'équation (22), on obtient la valeur minimum du nombre de Rayleigh critique, soit :

$$\min(Ra_c) = \frac{27\pi^4}{4} \simeq 657.5 \quad (24)$$

Une des interprétations physique de (24) est la suivante : si on prend un écoulement avec surface libre en haut et en bas, que l'on garde toutes les grandeurs physique du fluide constantes (μ, κ), et que l'on chauffe cet écoulement progressivement de $Ra = 0$ à $Ra > 0$ (lorsque $T_1 \neq T_0$), la convection apparaîtra précisément quand on atteint $Ra = 657.5$; la convection apparaîtra avec des cellules de convection dont le rapport d'aspect sera $\sqrt{2}$ comme schématisé sur la figure 7.

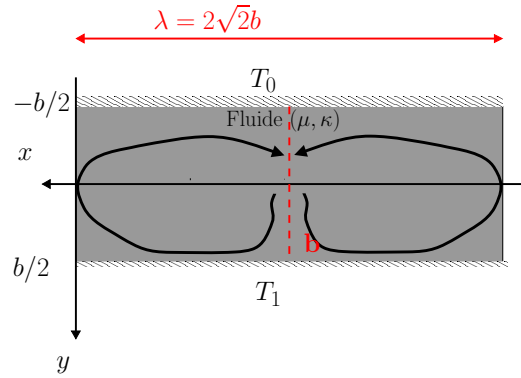


FIG. 7 – Longueur d’onde de la cellule de convection dans le cas d’une cellule chauffée par le bas avec surface libre.

A noter que l’on aurait pu mener la même analyse de stabilité linéaire dans le cas d’une couche de fluide avec surface rigide. La condition limite (8) serait restée valable alors que la condition (9) aurait été remplacée par

$$u'_x = 0 \text{ en } y = \pm \frac{b}{2}. \quad (25)$$

Dans ce cas avec surface rigide, on obtient comme paramètre critique $Ra_c = 1707.18$ et $\lambda = 2.016b$. Il est donc plus difficile de démarrer la convection en présence de surface rigide.

Une analyse de stabilité linéaire peut aussi être réalisée dans le cas d’une couche chauffée uniformément en volume et refroidie par le haut. La paroi inférieure est considérée isolante, c’est à dire qu’aucun flux de chaleur ne peut passer à travers cette surface. On peut appliquer directement ce type d’approche au manteau terrestre, puisque le manteau est chauffé majoritairement par la désintégration radioactive des éléments le constituant et refroidi par conduction via la surface terrestre. Le nombre de Rayleigh approprié pour un écoulement avec chauffage interne est alors

$$Ra = \frac{\alpha \rho g A b^5}{k \mu \kappa},$$

où A est la taux de chaleur interne produit par unité de volume en W m^{-3} . Pour une condition de non-glissement (surface rigide), le nombre de Rayleigh critique minimum est 2772 et $2\pi/\lambda = 2.63$; pour des conditions de surface libre $\min(Ra_c) = 867.8$ et $2\pi/\lambda = 1.79$.

On peut pour conclure estimer ce nombre de Rayleigh pour le manteau terrestre : $\mu = 10^{21}$ Pa s est estimé à partir du rebond post-glaciaire. En terme de propriétés des roches mantelliques : $k = 4 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\kappa = 1 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}$ et $\alpha = 3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. On prend $g \simeq 10 \text{ m s}^{-2}$ et une masse volumique moyenne $\rho_0 = 4000 \text{ kg m}^{-3}$. Une valeur moyenne pour le taux de production de chaleur interne est $A = 3.6 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-3}$.

Si la convection est restreinte au manteau supérieur seul, on prend $b = 700 \text{ km}$ ce qui donne $Ra = 2 \cdot 10^6$. Si on prend tout le manteau $b = 2880 \text{ km}$, nous obtenons $Ra = 2 \cdot 10^9$. Dans les deux cas, le nombre de Rayleigh obtenu est bien supérieur au nombre de Rayleigh critique : c’est ce type d’analyse de stabilité qui a conduit Arthur Holmes à proposer en 1931 que la convection thermique était responsable de la dérive des continents.

Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

TD ④ Dynamique de l'atmosphère et approximation géostrophique

Rappel de Cours

Équation de Navier–Stokes dans un repère tournant

L'équation de Navier–Stokes s'écrit dans un référentiel galiléen

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\Delta} \vec{u} + \vec{\mathcal{F}}_V.$$

Lorsqu'on réécrit la dérivée particulière $(D\vec{u})/(Dt)$ dans un repère en rotation à une vitesse $\vec{\omega}(t) = \omega(t) \vec{e}_z$, on obtient

$$\left(\frac{d\vec{u}_I}{dt} \right)_I = \left(\frac{d\vec{u}_R}{dt} \right)_R + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{u}_R + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (1)$$

où l'indice I signifie que l'on est dans le repère inertiel ou galiléen, et l'indice R signifie que l'on est dans le repère relatif en rotation.

On peut alors récrire l'équation de Navier–Stokes dans le repère en rotation

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\Delta} \vec{u} + \vec{\mathcal{F}}_V + 2\rho \vec{u} \wedge \vec{\omega} - \rho \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} - \rho \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}$$

où \vec{u} est la vitesse relative dans le repère en rotation (écrite avec l'indice R dans l'équation (1)), $2\rho \vec{u} \wedge \vec{\omega}$ est la force de Coriolis, $\rho \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ est la force centrifuge et $-\rho \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}$ est la force de Poincaré.

Lorsqu'on est dans un repère en rotation uniforme $\omega = \text{constante}$, cela implique que la force de Poincaré est nulle. On démontre que l'équation de Navier–Stokes dans un repère en rotation uniforme à une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ s'écrit

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\Delta} \vec{u} + \vec{\mathcal{F}}_V + 2\rho \vec{u} \wedge \vec{\omega} \quad (2)$$

où $P = P' - \rho\phi_C$ est la pression modifiée prenant en compte la force centrifuge, P' étant la pression dynamique et ϕ_C le potentiel associé à la force centrifuge. On a dans ce cas $\phi_C = \frac{\omega^2 r_\perp^2}{2}$ tel que $\vec{\nabla} \phi = \omega^2 \vec{r}_\perp = -\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ avec r_\perp le rayon des coordonnées sphériques projeté sur un plan horizontal (voir Cours).

On peut alors écrire cette équation du mouvement dans le repère lié à rotation uniforme de la Terre à une vitesse $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. Décrire la dynamique de l'atmosphère revient à résoudre cette équation du mouvement afin d'obtenir le champ de vitesse \vec{u} dans le repère lié à la Terre.

L'approximation géostrophique

Dans le cadre de l'équilibre géostrophique, on écrit que l'équation (2) se réduit à un équilibre entre le gradient de pression et la force de Coriolis

$$2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla}P. \quad (3)$$

En écrivant cet équilibre stationnaire en temps, on suppose implicitement que la force de Coriolis domine tous les autres termes de l'équation de Navier–Stokes (sauf le gradient de pression).

Dans le cadre de la dynamique de l'atmosphère, on se placera souvent dans l'approximation de couche mince : on a une taille caractéristique horizontale bien supérieure à la taille caractéristique verticale. On voit directement dans l'équation (3) que seule la composante du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ perpendiculaire au sol va intervenir dans le calcul pour décrire les mouvements horizontaux des masses atmosphériques. Cette composante verticale du vecteur rotation s'écrit $\vec{\Omega}_\perp = \Omega \sin \varphi \vec{k}$ où φ est la latitude géographique et \vec{k} est le vecteur local perpendiculaire au sol. On se rend compte ainsi que la force de Coriolis va jouer un rôle important dans la dynamique de l'atmosphère surtout aux moyennes et hautes latitudes.

L'équilibre géostrophique (3) nous apprend aussi que la trajectoire du vent dans une instabilité (par exemple un cyclone ou un anticyclone) s'obtient directement à partir du champ de pression P : le fluide suit les isobares.

Loi des gaz parfaits

On utilisera dans certains exercices la modélisation simpliste d'une atmosphère isotherme en équilibre hydrostatique, soit

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT \Leftrightarrow P = \rho \frac{RT}{M} \text{ et } -\vec{\nabla}P \Big|_z \vec{e}_z = -\frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z = \rho \vec{g} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

où P est la pression en Pa, V le volume considéré en m^3 , n le nombre de moles, $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits, T la température en K, m la masse en g, M la masse molaire en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, ρ la masse volumique en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et z l'altitude en m.

On a alors la relation

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g = -\frac{PM}{RT}g \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{gM}{RT}dz \Leftrightarrow P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{gM}{RT}z\right) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right),$$

avec $P_0 = P(z=0)$, $H = \frac{RT}{gM}$ une hauteur caractéristique de la décroissance de la pression avec l'altitude.

Exercice 1 – Vent géostrophique

a) Rappeler l'équation de Navier–Stokes générale satisfaite par le champ de vitesse vectoriel \vec{u} lorsque celui-ci est écrit dans le référentiel de la Terre en rotation. On considérera que la norme du vecteur rotation de la terre $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ est constante au cours du temps. Identifier la force centrifuge et la force de Coriolis dans l'équation de Navier–Stokes. On suppose que la seule force agissant sur une parcelle fluide de l'atmosphère est son propre poids. Dans le cadre de l'approximation de couche mince atmosphérique, on suppose que la gravité $|\vec{g}|$ et la masse volumique ρ d'une parcelle de l'atmosphère sont constantes.

b) Démontrer que le poids agissant sur chaque parcelle fluide peut s'écrire sous la forme d'un gradient de potentiel, potentiel que l'on écrira ϕ_P . Introduire le potentiel ϕ_c associé à la force centrifuge. Récrire la champ de pression $P(\vec{x}, t) = [p + \rho\phi_P - \rho\phi_c](\vec{x}, t)$ et en déduire l'équation générale de Navier–Stokes utilisée pour la dynamique de l'atmosphère.

c) Quelles hypothèses doit-on faire pour écrire l'équation de l'équilibre géostrophique ? D'après le cours, où la force de Coriolis est-elle importante pour la dynamique de l'atmosphère terrestre ?

d) Considérer un repère local orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{k})$ et un point M à la surface terrestre où \vec{e}_x est dirigé vers l'est. Projeter l'équation de l'équilibre géostrophique selon les trois axes des coordonnées. On notera les trois composantes du vecteur vitesse $\vec{u} = (u, v, w)$. On notera φ la latitude géographique.

e) Rappeler pourquoi l'approximation de couche mince est justifiée dans le cas de l'atmosphère. Que cela implique-t-il pour w comparée à u et v ? Montrer que l'équilibre géostrophique se réduit alors à l'équation dite du *vent géostrophique* :

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho 2\Omega \sin \varphi} \vec{k} \wedge \text{grad } P \quad (4)$$

où \vec{k} est le vecteur unitaire dirigé selon la verticale locale, φ est la latitude, ρ est la masse volumique du fluide atmosphérique et P est le champ de pression. En déduire l'expression du champ de vitesse horizontal (u, v) en fonction du gradient de pression.

f) On observe sur une carte d'isobares à 3000 m d'altitude que l'écartement des isobares autour de la pression moyenne est de 5 hPa pour 200 km.

Calculer la vitesse du vent géostrophique $|\vec{u}|$ en utilisant la réponse à la question e). On donne $\rho = 1.29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\varphi = 45^\circ$.

g) Calculer la vitesse du vent géostrophique en modélisant cette fois l'atmosphère comme un gaz parfait compressible en équilibre hydrostatique (voir rappel de Cours). La différence avec la question f) est que l'on prend en compte ici la variation de la masse volumique avec la hauteur.

On donne $T(z = 3000 \text{ m}) = 265 \text{ K}$, $T(z = 0) = 273 \text{ K}$, $\rho_0 = \rho(z = 0) = 1.29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Exercice 2 – Carte de pression et vent géostrophique

Sur la figure 1 est reproduit une carte de pression météorologique où l'on distingue une dépression centrée sur les îles britanniques et un anticyclone sur les Açores. Les pressions sont exprimées en hecto-Pascal (10^2 Pascal).

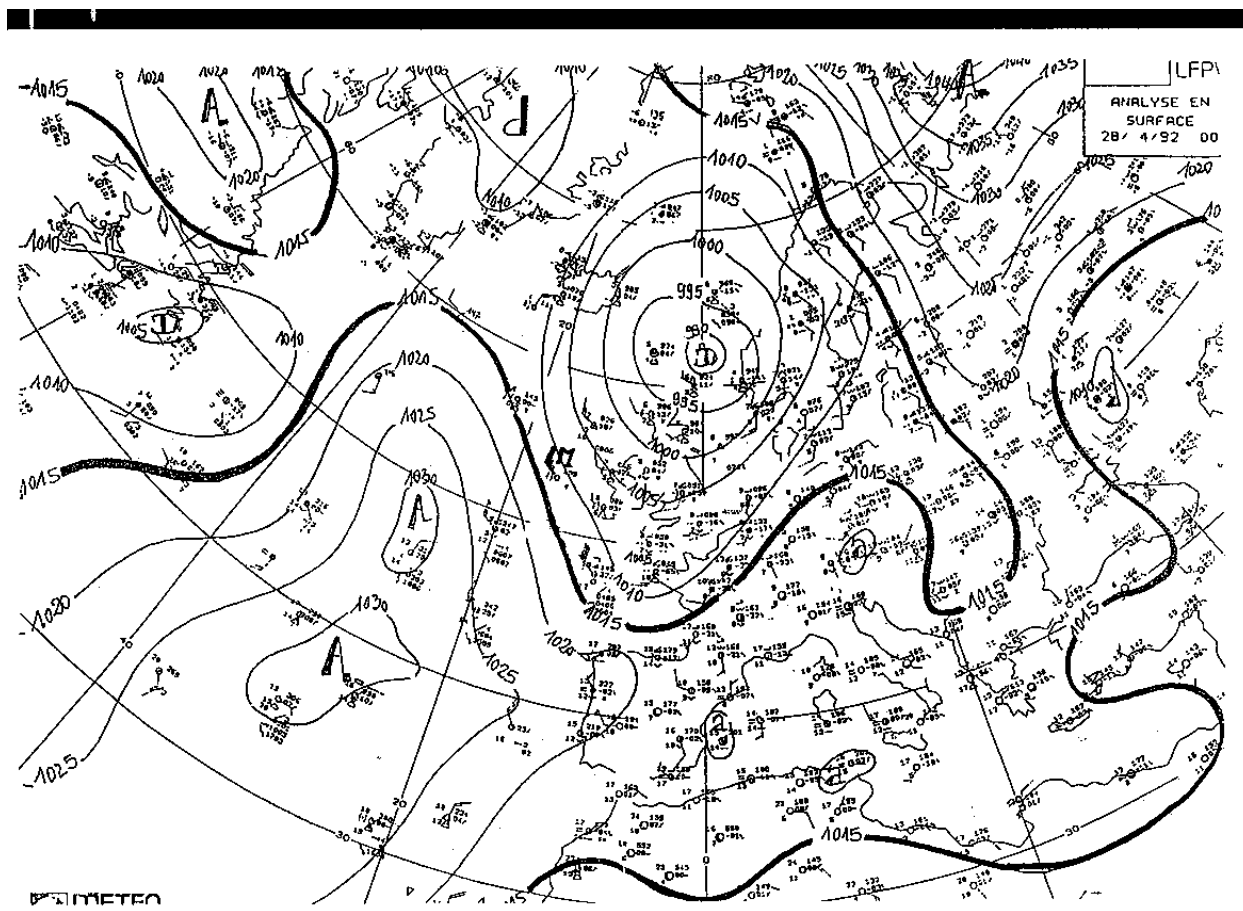


FIG. 1 – Carte de pression météorologique où une dépression est centrée sur les îles britanniques et un anticyclone est centré sur les Açores.

a) Dessiner la direction et calculer l'amplitude approximative de la force associée au gradient de pression s'appliquant sur une particule de fluide au point M initialement au repos. Le point M sur la figure 1 se situe sur l'isobare 1010 hPa. On donne Δd (centre de l'anticyclone – centre de la dépression) = 3200 km et P_{\min} (dépression) = 990 hPa et P_{\max} (anticyclone) = 1030 hPa.

b) A partir de la relation (4) du vent géostrophique, calculer la norme du vent \vec{u} au point M et donner son sens. On donne : $\rho = 1.25 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\varphi = 54^\circ \text{ N}$ la latitude au point M .

c) Dans quel sens les particules fluides tournent-elles autour des dépressions et anticyclones dans l'hémisphère Nord. Est-ce la même chose pour l'hémisphère Sud ?

Exercice 3 – Frottements dans la couche limite atmosphérique

On se place à moyenne latitude dans l'hémisphère Nord, à une altitude z modeste (de l'ordre de la centaine de mètres) autour d'une dépression. On suppose que l'on est en présence d'isobares circulaires, dont le rayon de courbure est suffisamment grand pour que le mouvement d'une particule dans l'atmosphère soit considéré comme rectiligne et uniforme sur un court trajet.

On constate que l'angle α entre la direction du vent et la direction d'une isobare est non-nul.

a) Quel devrait être l'angle α dans le cadre d'un mouvement d'une particule se déplaçant horizontalement et dont le mouvement est gouverné par l'équilibre géostrophique ?

b) Écrire l'équation de Navier–Stokes gouvernant le mouvement rectiligne et uniforme de la particule en mouvement dans la couche limite atmosphérique où les forces agissant sur la particule sont le poids et les forces de frottement $\vec{F}_{\text{frottement}}$ (Il n'est ni demandé de projeter Navier–Stokes ni demandé d'explicitier l'écriture de la force de frottement). En écrivant le poids sous la forme d'un gradient de potentiel comme dans l'exercice 1), montrer que l'on obtient une équation de Navier–Stokes comportant uniquement trois termes.

c) Montrer qualitativement à l'aide d'un schéma que les frottements à la base de la couche limite peuvent expliquer un angle α non nul entre la direction du vent et la direction des isobares.

Exercice 4 – Tornade atmosphérique

Une tornade se produit à une latitude $\varphi = 15^\circ \text{N}$. L'extension radiale de cette tornade est $r_0 = 1$ km. On observe que l'air y tourne à vitesse angulaire constante $\omega_0 = 0.1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

a) Dans un premier temps, on veut écrire l'équation de Navier–Stokes pertinente pour ce problème en faisant un certain nombre d'hypothèses. On suppose que

- le mouvement est stationnaire en temps,
- les vitesses radiales et verticales peuvent être négligées devant les vitesses azimutales,
- la tornade est à symétrie de révolution,
- les frottements visqueux sont négligés.

Montrer que l'équation de Navier–Stokes se réduit à $-\frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \Big|_r + \left(2\vec{u} \wedge \vec{\Omega} \right) \Big|_r$.

b) Calculer la vitesse du vent à la périphérie de la tornade, à 500 m, puis à 50 m de son centre.

c) Montrer que le terme de Coriolis peut être négligé en ce qui concerne la dynamique de la tornade.

d) Montrer que la pression à l'intérieur de la tornade à la distance r du centre est de la forme

$$P(r) = P_0 \exp \left[-\frac{\omega_0^2 M}{2RT} (r_0^2 - r^2) \right]$$

où P_0 est la pression à la périphérie de la tornade, M est la masse molaire de l'air, T est la température supposée constante. On modélisera l'atmosphère comme un gaz parfait pour répondre à cette question.

Calculer P au centre (œil de la tornade).

A.N. : $T = 298 \text{ K}$, $P_0 = 1000 \text{ hPa}$, $R = 8.31 \text{ J/K/mole}$, $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Exercice 5 – Ascendance - Subsidence

Des observations au voisinage du sol, à moyenne latitude Nord, montrent que la vitesse horizontale du vent $\|\vec{u}_h\|$ est constante et égale à 14 m/s. L'angle entre la direction du vent et la direction de l'isobare est de 35 degrés en tout point de l'isobare. Le rayon de courbure de cette isobare est 20 km. On s'intéresse à une zone où les isobares décrivent des cercles et où la vitesse du vent varie très peu en rayon par rapport au centre de ces isobares.

On va dans cet exercice chercher à calculer la vitesse verticale du vent à 100 m d'altitude en considérant d'abord le cas d'une dépression puis le cas d'un anticyclone.

On supposera que la masse volumique de l'air est constante dans la couche de faible épaisseur et que la vitesse verticale est strictement nulle au niveau du sol.

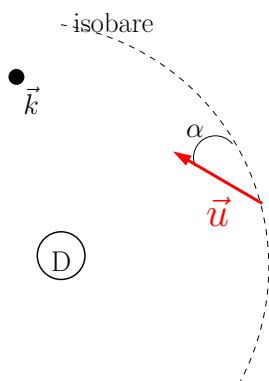


FIG. 2 – Schématisation du vent autour d'une dépression au voisinage du sol.

a) Sur la figure 2 est schématisée la vitesse du vent faisant un angle α avec la direction de l'isobare. On se retrouve dans le cas de l'exercice 3 avec une force de frottement qui pousse la fluide vers le cœur de la dépression.

En utilisant le principe de la conservation de la masse autour de cette dépression sur une épaisseur de 100 m, démontrez que l'on arrive à la relation suivante :

$$\frac{|\vec{u}_h| \sin \alpha}{r} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

où $|\vec{u}_h|$ est la norme de la composante horizontale du champ de vitesse schématisé sur la figure 2.

b) Dédurre de la question a) en intégrant la relation obtenue que l'on a ascendance de l'air au niveau des dépressions dans l'hémisphère Nord. Calculez cette vitesse pour $z = 100$ m.

c) Avec des arguments symétriques, démontrez que l'on a subsidence de l'air autour d'un anticyclone dans l'hémisphère Nord.

Exercice 6 – Vents et température sur la planète Mars

Le but de cet exercice est d'utiliser l'équation du vent géostrophique (établie dans l'exercice 1) pour déterminer l'intensité des vents sur la planète Mars.

a) On suppose que le gaz atmosphérique martien peut être assimilé à un gaz parfait ($P = \rho R^* T$) où $R^* = R/M$. Retrouver la relation $P(z) = P_0 e^{(-gz/(R^*T))}$ entre la pression P , l'altitude z , la pression de surface P_0 et la température T dans le cas d'une atmosphère isotherme (température T constante selon z) en équilibre hydrostatique.

b) On veut estimer le vent dans la région de latitude (45N - 60N) de Mars. En supposant que l'atmosphère est en équilibre géostrophique, écrire à partir de l'équation (4) la relation entre les variations latitudinales (à altitude constante) de la pression et le vent zonal u (vent selon une latitude constante ou encore vent selon un parallèle géographique). On démontrera en particulier que $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = a \frac{\partial P}{\partial y}$ où a est le rayon de la planète Mars et où y pointe vers le pôle Nord géographique.

c) La figure 3 nous donne la distribution spatiale de la température sur Mars en fonction de

la latitude et de la pression (reliée à l'altitude, voir question a)). Il se trouve qu'entre les latitudes 45N - 60N, le modèle utilisé en a) et b) pourrait s'appliquer :

- la température, au premier ordre, ne dépend pas de z .
- la force de Coriolis est importante dans cette région.

On suppose pour pouvoir continuer à mener le calcul analytiquement que la température dans cette région ne dépend que de la latitude φ et pas de l'altitude :

$$T(\varphi, z) = T(\varphi) = \alpha + \beta\varphi$$

avec, à 45N, $T(\pi/4) = 190$ K et, à 60N, $T(\pi/3) = 170$ K.

Déduire des deux questions précédentes la relation suivante entre le vent zonal et les variations latitudinales de la température,

$$u = -\frac{gz}{2a\Omega \sin \varphi T} \frac{\partial T}{\partial \varphi}.$$

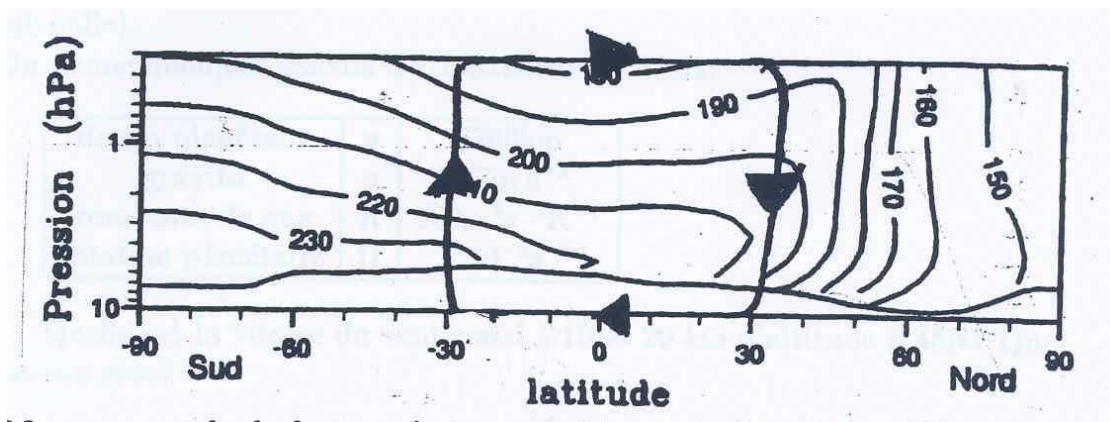


FIG. 3 – Moyenne zonale $\bar{T}(\varphi, z) = \int_{\theta=0}^{2\pi} T(\theta, \varphi, z)$ de la température sur Mars près du solstice d'hiver Nord avec en abscisse la latitude et en ordonnée le logarithme de la pression (les courbes sont des isothermes en K). θ est la longitude.

On donne quelques valeurs physiques de la planète Mars :

Rayon	a	3700 km
gravité moyenne	g	3.7 m s^{-2}
taux de rotation planétaire	Ω	7.10^{-5} s^{-1}

Quelle est la vitesse du vent zonal à 10 et 20 km d'altitude à 45N ? Quel est son sens ? En déduire que le vent zonal croît avec l'altitude.

Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

TD ⑤ Géomagnétisme et dynamique du noyau terrestre

Exercice 1 – Croissance de la graine terrestre

On suppose que la graine solide au centre de la Terre a commencé à cristalliser dès la formation de la Terre au temps $t = 0$. On suppose également que le taux volumique de cristallisation du noyau liquide est resté constant ; en d'autres termes, le volume de la graine croît linéairement.

a) En tenant compte de ces hypothèses, quel est le taux de croissance actuelle de la graine en rayon (en mm/an) ?

b) Combien de tonnes de fer cristallisent par seconde dans le noyau ?

A.N. : On donne $\bar{\rho}_{\text{Fer liquide noyau}} = 12 \cdot 10^3 \text{ kg / m}^3$.

c) Auriez-vous un modèle thermique plus réaliste à proposer concernant la cristallisation de la graine ?

Exercice 2 – Le dipôle magnétique

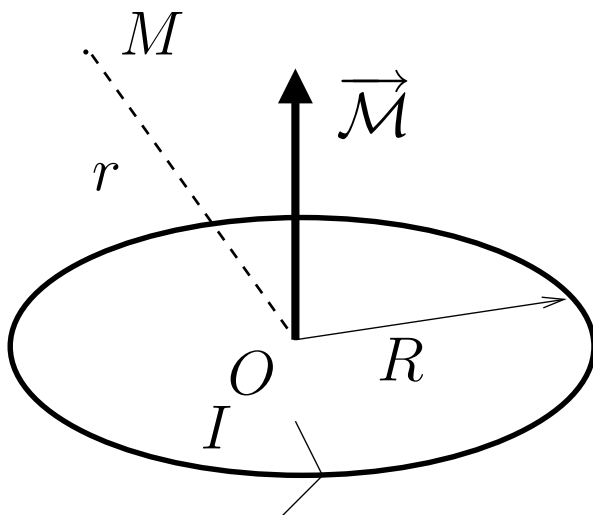


FIG. 1 – Anneau parcouru par un courant I de courant donnant naissance à un champ magnétique dipolaire.

Soit un anneau de rayon R parcouru par un courant I . On définit le moment magnétique de la spire $\vec{M} = IS\vec{n}$ où S est la surface horizontale intérieure à l'anneau de courant et $\vec{n} = \vec{e}_z$ est le vecteur unitaire normal au plan horizontal.

Si l'on se place en un point M tel que $r \gg R$, on démontre que le champ magnétique généré au point M par la spire de courant s'écrit

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{M}}{r^3} \right]. \quad (1)$$

a) En utilisant un repère de coordonnées sphériques centré en O sur la figure 1, déduire de (1) les composantes B_r , B_θ et B_ϕ du champ magnétique au point M . On supposera que $\vec{M} = M\vec{e}_z$. Pourquoi la composante $B_\phi = 0$?

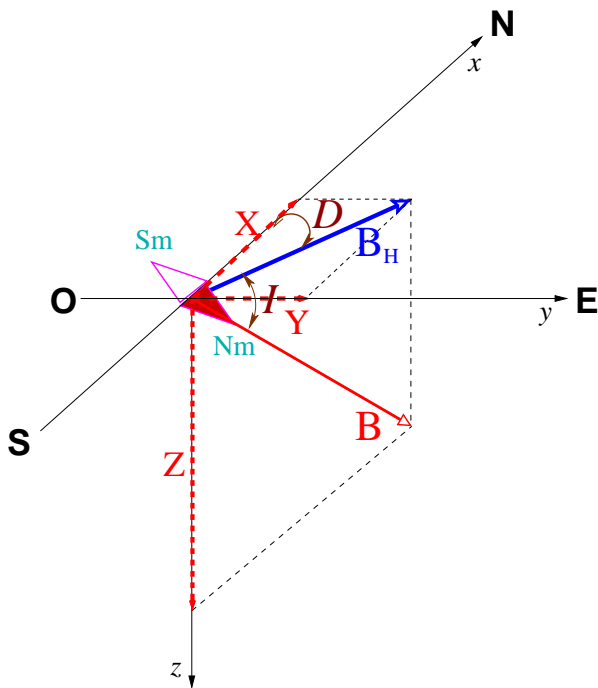
b) On cherche à tracer les lignes de champ magnétique associées à la boucle de courant ; par

définition, les lignes de champ de \vec{B} sont des courbes tangentes au vecteur \vec{B} en chaque point.

Pour tracer les lignes de champ dans notre problème, on écrit que si l'on se déplace dans le plan défini par $(\vec{\mathcal{M}}, M)$ d'un point M à un point M' (tel que $\overrightarrow{MM'} = d\vec{M} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta$) le long d'une ligne de champ, alors nécessairement $d\vec{M}$ est **colinéaire** au champ \vec{B} ou encore $d\vec{M} = k\vec{B}$ où k est une constante.

Écrire l'expression des lignes de champ magnétique et en tracer quelques unes.

c)



- Par définition, la déclinaison D est l'angle entre le Nord Géographique et la composante horizontale du champ magnétique terrestre mesurée en surface. Elle est comptée positivement vers l'Est.
- L'inclinaison I est l'angle entre le champ magnétique total et sa composante horizontale. Elle est comptée positivement vers le bas.

Écrire les relations entre X, Y, Z et B, B_H, I et D .

FIG. 2 – Illustration des éléments du champ magnétique terrestre avec la déclinaison D et l'inclinaison I . B_H est la projection sur le plan horizontal du vecteur champ magnétique. X, Y et Z sont les composantes du champ magnétique terrestre projetées respectivement selon la direction Sud–Nord, la direction Ouest–Est et la direction Haut–Bas.

d) On fait maintenant l'hypothèse que le champ magnétique de la Terre est un dipôle axial dont l'axe de symétrie est confondu avec l'axe de la rotation de la Terre. Avec ces hypothèses, écrire les relations existant entre B_r et Z d'une part et entre B_H et B_θ d'autre part.

Sachant que les *isogones* sont des lignes d'égale valeur de déclinaison magnétique à la surface terrestre et les *isoclines* des lignes d'égale valeur d'inclinaison magnétique à la surface terrestre, à quoi ressembleraient les cartes d'isogones et d'isoclines dans le cas d'un dipôle axial centré ?

Calculer la norme de \vec{B} en tout point de la surface terrestre en fonction de \mathcal{M} dans le cas d'un dipôle axial centré. Est-ce que la norme de \vec{B} est plus grande aux pôles géographiques ou à

l'équateur.

e) À Chambon la Forêt (Observatoire magnétique de Paris), le champ magnétique vaut :

$$\begin{aligned}Z &= 42784 \text{ nT} \\B_H &= 20948 \text{ nT}\end{aligned}$$

En supposant toujours que le champ magnétique est produit par un dipôle centré, comment est orienté le moment magnétique du champ magnétique terrestre dipolaire ? Quelle est la latitude géographique de Chambon déduite de Z et B_H ? Commenter la précision de cette détermination.

Calculer le moment dipolaire du champ magnétique terrestre à partir des mesures du champ à Chambon. Pourquoi les deux composantes donnent-elles un moment dipolaire différent ? ($R_T = 6371\text{Km}$).

Exercice 3 – Explorateur

Un explorateur a lu dans le vieux grimaire chinois que la boussole indiquait toujours la direction sud-nord géographique. Il se fie à cette croyance et décide d'atteindre le pôle Sud géographique en suivant à chaque instant la direction Sud indiquée par la boussole. Il part du point A indiqué sur la figure 3. Dessiner approximativement le chemin qu'il parcourt, sachant que la projection stéréographique utilisée conserve les angles (donc un angle entre 2 directions tracées sur la sphère reste invariant par projection).

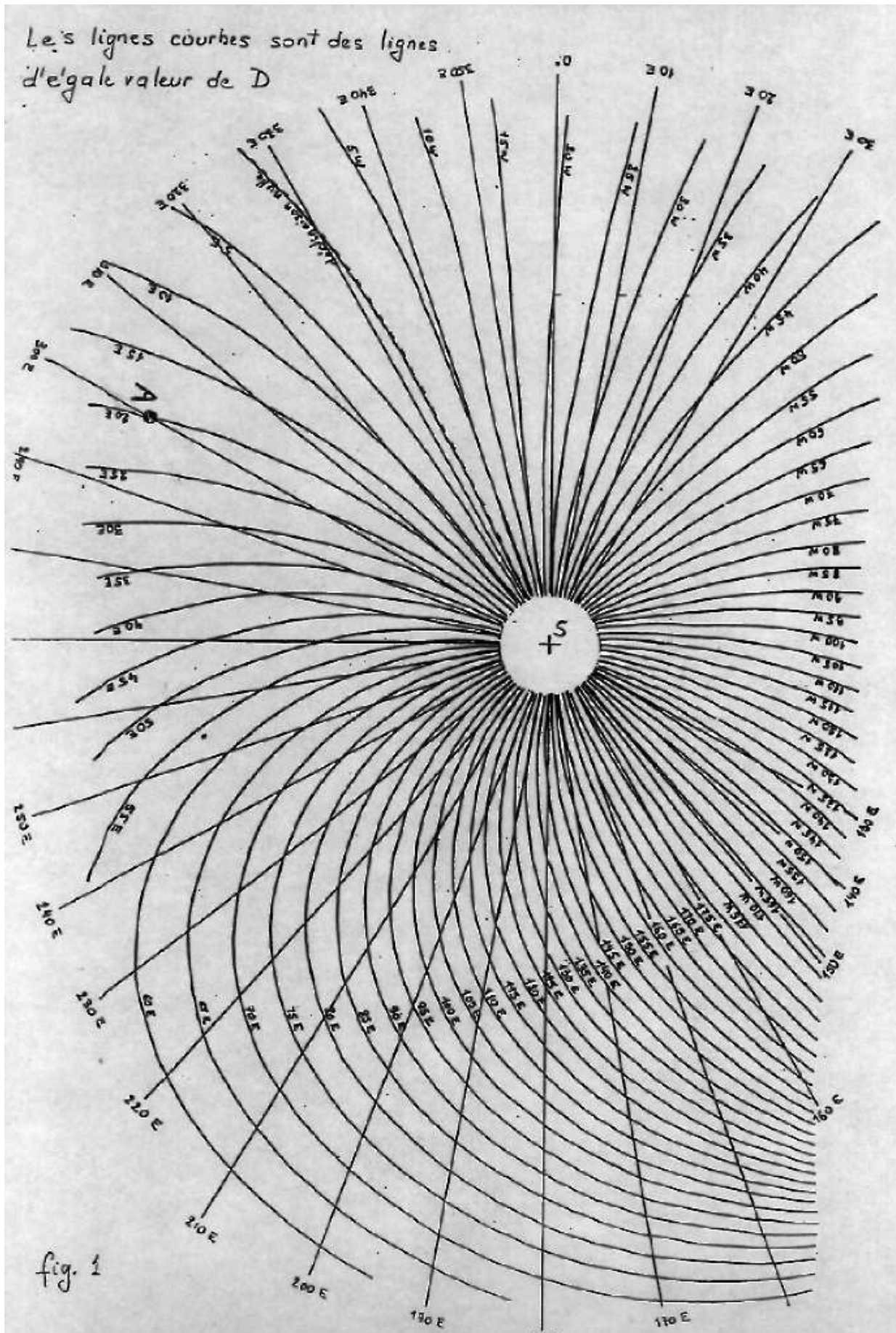


FIG. 3 – Vue du pôle Sud géographique des isogones et des lignes de longitude. L'explorateur part du point A.

Exercice 4 – Désaimantation thermique

On désaimante thermiquement un échantillon prélevé dans un grès vosgien daté du trias (220 millions d'années). Le champ paléomagnétique de l'échantillon B_x , B_y et B_z est mesuré à chaque température ; les directions x, y, z correspondent respectivement aux directions Sud-Nord, Ouest-Est et Haut-Bas du site de prélèvement. Les mesures sont reportées sur le tableau 1 et sur la figure 4.

On utilisera dans cet exercice les expressions reliant les composantes X, Y et Z du champ magnétique à l'inclinaison et à la déclinaison du champ magnétique.

T(°C)	B_y	B_z	B_x
20	0.47	0.04	0.30
100	0.39	0.07	0.45
200	0.33	0.094	0.86
300	0.25	0.072	0.65
400	0.12	0.034	0.31
500	0.02	0.005	0.005

TAB. 1 – Champs paléomagnétiques B_x , B_y et B_z en fonction de la température de chauffage.

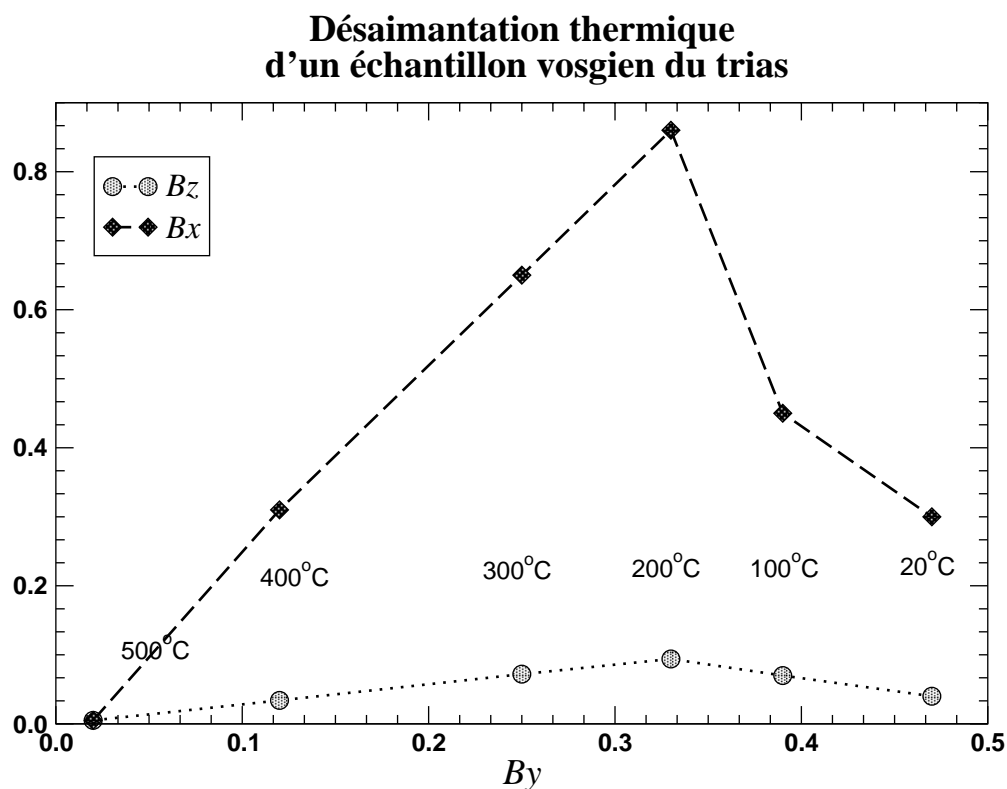


FIG. 4 – Courbes de désaimantation d'un grès vosgien triassique.

a) Comment peut-on expliquer l'allure générale des courbes de désaimantation ? Quel est le moyen d'obtenir l'inclinaison et la déclinaison magnétiques à partir de ces mesures ?

A l'aide de la mesure de l'inclinaison, que peut-on dire qualitativement de la position des Vosges à la surface terrestre durant le Trias ?

NB : Pour répondre à la dernière question, on utilisera la relation fondamentale du paléomagnétisme en précisant ses hypothèses.

b) Lorsque l'on mesure une inclinaison et une déclinaison en un point connu à la surface terrestre, il est possible de déterminer la position du *pôle géomagnétique virtuel (PGV)* correspondant, en supposant que le champ magnétique terrestre est parfaitement dipolaire mais pas né-

cessairement aligné avec l'axe de rotation de la Terre.

Voici les formules mathématiques donnant la location du *PGV* : on part de $\tan I = 2 \cot p$ où p est la colatitude magnétique du pôle par rapport au site de prélèvement, I est l'inclinaison mesurée.

En utilisant la trigonométrie sphérique classique, on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda_P &= \sin^{-1} (\sin \lambda_S \cos p + \cos \lambda_S \sin p \cos D) \\ \beta &= \sin^{-1} \left(\frac{\sin p \sin D}{\cos \lambda_P} \right) \\ \text{et si } \cos p &\geq \sin \lambda_P \sin \lambda_S \rightarrow \Phi_P = \Phi_S + \beta \\ \text{ou si } \cos p < &\sin \lambda_P \sin \lambda_S \rightarrow \Phi_P = \Phi_S + \pi - \beta\end{aligned}$$

où λ_P est la latitude géographique du pôle magnétique, λ_S est la latitude géographique du site, β est la différence de longitude entre le pôle et le site, Φ_P est la longitude du pôle et Φ_S est la longitude du site.

Application : La position actuelle des Vosges est 48°N et 5°E. Déduire la position apparente du *PGV* dans les Vosges durant le Trias.

Expliquer pourquoi les réponses aux questions a) et b) sont cohérentes.

c) Les mêmes mesures paléomagnétiques sont effectuées dans l'Oural (position actuelle : 60°N, 60°E) pour un échantillon daté du Trias ; on obtient une inclinaison égale à 56.2° et une déclinaison égale à 59.90°. Que peut-on en conclure ?

Exercice 5 – Dérive des continents

Exercice tirée de « Problèmes résolus de Sciences de la Terre et de l'Univers », J.Y. Daniel, Vuibert, 2000.

Considérons un exemple d'îles volcaniques liées à l'activité d'un point chaud : l'archipel des îles des Empereurs, dont la terminaison orientale est l'archipel d'Hawaii (figure 5). On observe des âges radiochronologiques croissant en s'éloignant du panache actuel. Le point chaud d'Hawaii est considéré comme l'un des plus représentatifs des points chauds. Avec ses homologues du Pacifique, il constitue un référentiel dit absolu. C'est en étudiant les traces de chapelets d'îles que l'on parvient à donner une image du déplacement absolu des plaques.

Des données paléomagnétiques très récentes sont venues fragiliser l'hypothèse d'un référentiel absolu de ce point chaud pour des âges anciens (> 40 Ma). Nous allons voir pourquoi.

a) Si Hawaii (latitude $\lambda = 19^\circ\text{N}$) est un point chaud fixe, quelles sont les inclinaisons paléomagnétiques que l'on devrait trouver fossilisées dans les laves volcaniques des îles de Detroit ($\lambda = 52^\circ\text{N}$) et Suiko ($\lambda = 44^\circ\text{N}$) ?

En réalité, ce que l'on observe est donné dans la table 2.

Site	Age (10 ⁶ ans)	Latitude	Inclinaisons fossiles
Detroit	82	52°N	-55,5°
Suiko	65	44°N	+45,5°

TAB. 2 – Mesures d'inclinaisons paléomagnétiques sur les îles de Detroit et Suiko.

b) Comment expliquer les inclinaisons positives et négatives ?

c) Calculer la vitesse de déplacement de la plaque au dessus du point chaud déduite de l'espacement des deux îles. On supposera un alignement N-S des deux îles. Donner les résultat en

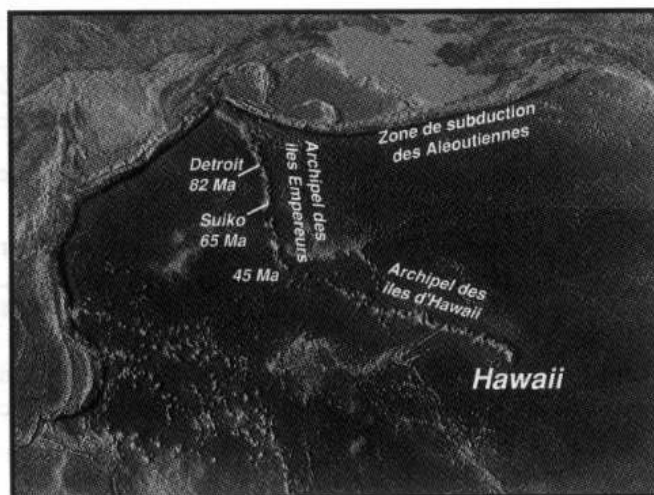


FIG. 5 – Carte topographique illustrant la trace du point chaud d'Hawaïi.

cm/an.

- d)** Calculer la vitesse maximale de déplacement déduite des données paléomagnétiques.
- e)** En comparant les deux vitesses ainsi calculées, que peut-on en déduire ?

Exercice 6 – Dipôle terrestre

a) On écrit généralement le champ magnétique terrestre à l'extérieur du noyau terrestre sous la forme $\vec{B} = -\text{grad } V$. Comment appelle-t-on V dans ce cas ? Quelle propriété physique du manteau nous autorise à écrire cette relation ?

Dans la suite de l'exercice nous nous intéressons qu'aux composantes dipolaires du champ magnétique.

b) Est-il réaliste de modéliser le champ magnétique terrestre en ne tenant compte que des composantes dipolaires ? Commentez. Quelle grandeur physique caractérisant le champ magnétique doit-on mesurer en un site pour avoir une idée de la latitude géographique à laquelle on se trouve ? Dans ce cas, quelle relation utilise-t-on et sous quelles hypothèses est-elle valable ?

c) Une des écritures possibles d'un champ magnétique dipolaire se fait via le potentiel magnétique généré par la plus petite entité magnétique, une boucle de courant ou dipôle magnétique ; on obtient

$$V(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{M} = M_x \vec{e}_x + M_y \vec{e}_y + M_z \vec{e}_z \quad \text{avec } \vec{r} = \overrightarrow{OM} \quad (2)$$

où \vec{M} est le moment magnétique et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ S.I.

En développant le produit scalaire entre le vecteur moment magnétique \vec{M} écrit en coordonnées cartésiennes et le vecteur rayon \vec{r} écrit en coordonnées sphériques, en déduire l'expression de V en fonction de $M_x, M_y, M_z, r, \theta, \phi$.

(Pour cela on pourra s'aider de la figure 6).

- d)** Une autre écriture possible du champ magnétique total extrait du noyau terrestre consiste

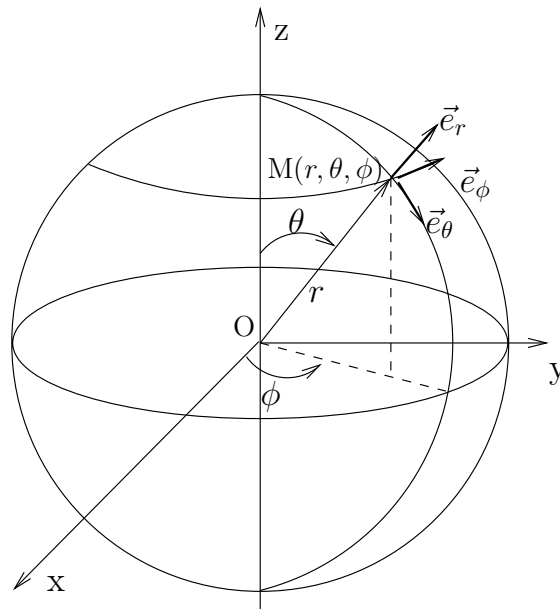


FIG. 6 – Système de coordonnées sphériques.

à utiliser un développement en harmonique sphériques du potentiel magnétique :

$$V(r, \theta, \phi) = r_T \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_T}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta) [g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi] \quad (3)$$

où r_T est le rayon de la Terre, n et m désignent respectivement le degré et l'ordre de l'harmonique sphérique, P_n^m sont les polynômes de Legendre et g_n^m, h_n^m les coefficients de Gauss.

Écrire le potentiel magnétique de degré $n = 1$: c'est le potentiel associé aux composantes dipolaires.

Dans quelles unités s'expriment les coefficients de Gauss. Justifiez la réponse à l'aide d'arguments dimensionnels.

On donne $P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta$; $P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta$.

e) En comparant les expressions de V obtenue aux deux questions précédentes, écrire les relations entre $\mathcal{M}_x, g_1^0, \mathcal{M}_y, g_1^1, \mathcal{M}_z, h_1^1$.

f) Considérez les 3 cas où $g_1^0 \gg g_1^1, h_1^1$, $g_1^1 \gg g_1^0, h_1^1$ et $h_1^1 \gg g_1^0, g_1^1$.

En déduire la signification physique de ces trois coefficients de Gauss.

Si la signification de ces termes ne vous apparaît pas directement, une autre façon de poser la question est : quelle est la géométrie du champ dans ces 3 cas ? Pour cela, il est judicieux d'écrire la composante radiale du champ B_r en $r = R_T$ et d'étudier son amplitude et sa variation spatiale en fonction des 3 cas.

g) Dans le cas de la Terre $g_1^0 = -29\,775$ nT, $g_1^1 = -1\,851$ nT et $h_1^1 = 5\,411$ nT. En vous reposant sur ce que vous avez appris en cours sur l'allure du champ magnétique terrestre, ces valeurs sont-elles cohérentes avec votre réponse à la question précédente ? Que signifie le signe négatif de g_1^0 ?

Exercice 7 – Expérience d’une sphère en rotation en présence d’un champ magnétique

Un expérimentateur décide de s’attaquer à la modélisation de la dynamique du noyau terrestre.

Plutôt que de générer du mouvement à l’aide de différence de température (pas suffisamment efficace, au moins en laboratoire...), il décide de forcer le mouvement en faisant tourner une sphère extérieure à une vitesse de rotation Ω_1 autour d’une graine à l’arrêt, le fluide étant contenu entre les deux sphères : c’est un écoulement de *Couette sphérique* (figure 7).

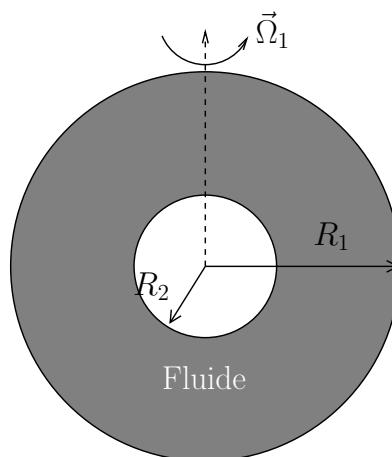


FIG. 7 – Écoulement de Couette sphérique avec une sphère en rotation autour d’une graine à l’arrêt, le fluide étant contenu entre les deux sphères.

Il fait le tour de son laboratoire et recense, à sa disposition :

- 140 litres de gallium,
- 20 litres de sodium,
- une graine de rayon $R_2 = 5$ cm,
- un moteur pouvant tourner jusqu’à $\Omega_1 = 2\,000$ tours/minute.

Quelques propriétés physiques des deux fluides sont données dans le tableau 3.

		GALLIUM	SODIUM
ρ	kg/m ³	6.09×10^3	0.93×10^3
ν	m ² /s	3.1×10^{-7}	7.75×10^{-7}
σ	(mΩ) ⁻¹	3.68×10^6	10.35×10^6

TAB. 3 – Propriétés physiques du gallium liquide et du sodium.

Il estime ensuite qu’entre une sphère en rotation à Ω_1 et une graine à l’arrêt, une bonne vitesse caractéristique de l’écoulement peut se calculer de la façon suivante :

$$U_0 = [(R_1 - R_2) / 2] \Omega_1$$

a) Avec les volumes ci-dessus de gallium et sodium, l’expérimentateur se demande avec quel fluide il pourra atteindre le nombre de Reynolds magnétique maximum entre les deux sphères, la taille de la graine étant fixée à 5 centimètres.

On vous demande donc tout d’abord d’estimer la taille maximale de la sphère externe R_1 dans le cas de chaque fluide, à partir du volume de fluide disponible.

b) A partir de cette taille, on pourra construire l’échelle caractéristique de l’écoulement : $L_0 = R_1 - R_2$, cette grandeur intervenant dans le nombre de Reynolds magnétique Re_m .

Pour ensuite estimer le Re_m maximum, on prendra le cas extrême où la sphère externe est à la vitesse maximale ($\Omega_1 = 2000$ tours/min). Calculer Re_m dans le cas de l’expérience avec le gallium

et dans le cas de l'expérience avec le sodium.

Bien entendu, l'expérimentateur choisit pour faire son expérience le fluide qui lui permet d'atteindre le plus grand Reynolds magnétique. Quel est-il ?

Est-on alors dans un régime où on pourrait observer l'effet dynamo durant l'expérience ? Pourquoi ?

L'expérimentateur fait donc construire une sphère externe dont la taille est donnée par le volume disponible du fluide choisi. (Pour ceux qui n'ont pas trouvé le résultat on prendra $R_1 = 32$ centimètres et du gallium).

c) Dans un deuxième temps, l'expérimentateur se rappelle qu'il veut étudier une dynamo de type « terrestre », c'est à dire avec une forte influence de la rotation ou encore une forte influence de la force de Coriolis.

Il se rappelle aussi que pour être dans la limite asymptotique des faibles viscosités (régime du noyau où la viscosité joue un rôle essentiellement à travers les couches limites), il faut que le nombre d'Ekman $E = \frac{\nu}{\Omega L^2}$ soit inférieur à 10^{-8} .

A quelle vitesse Ω_1 doit donc tourner la sphère externe pour qu'on se trouve dans le régime asymptotique ? Donner le résultat en tours pas minute.

Quelle serait la nouvelle valeur du nombre de Reynolds magnétique dans cette expérience de Couette sphérique où la sphère externe est en rotation à Ω_1 et la graine à l'arrêt ?

Peut-on s'assurer que cette expérience serait bien une dynamo ? Peut on y répondre sans équivoque ?

d) Dans cet énoncé, on n'a pas encore parlé de champ magnétique imposé. En faudrait-il un pour que cette expérience soit une dynamo ? Quelle solution proposeriez pour vous rapprocher du noyau terrestre ?

Remarques :

- Dans tous vos calculs, en particulier pour la taille de la sphère que vous devez déterminer, arrondissez la taille au nombre entier le plus proche !
- Dans vos calculs, travaillez toujours en unités S.I. ! En particulier des tours/min doivent être convertis en rad/s ou encore des litres en m^3 .
- On rappelle que : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ S.I.

Contrôle continu

Vendredi 10 Novembre 2006 – Durée : 2 heures

Calculatrice non autorisée. Le formulaire mathématique comprenant l'équation de Navier–Stokes en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques distribué en cours est le seul document autorisé durant l'épreuve.

On vous demande d'être concis, précis et rigoureux dans les réponses.

Tourbillon en laboratoire

Un expérimentateur en mécanique des fluides veut étudier un tourbillon de type atmosphérique en laboratoire. Cet expérimentateur sait que la force de Coriolis et les forces d'Archimède jouent un rôle important dans la physique donnant naissance à ces tourbillons. Pour autant, il ne veut pas reproduire en laboratoire un tourbillon avec une physique aussi complexe : son but est de faire tourner un disque entraîné par un moteur à la base d'un cylindre rempli d'eau et d'étudier le champ de vitesse généré par la rotation du disque. Le principe de l'expérience est schématisé sur la figure 1.

L'objectif de l'exercice ci-dessous est d'aider l'expérimentateur à préparer son expérience.

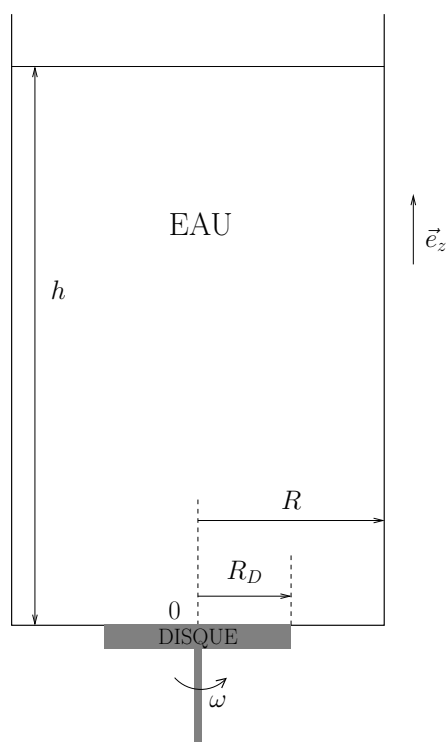


FIG. 1 – Schéma de principe du tourbillon expérimental.

a) Dans un premier temps, l'expérimentateur veut estimer le nombre de Reynolds d'un tourbillon atmosphérique. Pour cela, il prend comme vitesse caractéristique des vents 50 km/heure, comme taille caractéristique d'un tourbillon 100 km et comme viscosité de l'air $\nu_{\text{air}} = 5 \cdot 10^{-5}$ S.I.

Quelles sont les unités de ν ? Quel est le nombre de Reynolds d'un tourbillon atmosphérique ? Qu'en concluez-vous ?

b) L'expérimentateur veut maintenant estimer le nombre de Reynolds qu'il peut obtenir en laboratoire avec le matériel dont il dispose. Il possède un cylindre de rayon $R = 10$ cm (voir figure 1), un disque de rayon $R_D = 5$ cm (voir figure 1) qui va entraîner le fluide à la base du cylindre, un moteur pouvant entraîner le disque à une vitesse angulaire $\omega_{\text{max}} = 1000$ tours/minute. Il construit le nombre de Reynolds maximum pour le tourbillon expérimental de la manière suivante

$$Re = \frac{(R_D \omega_{\text{max}}) R}{\nu_{\text{eau}}}.$$

Pouvez-vous expliquer comment il obtient ce nombre ? Quelle est la valeur de ce nombre pour le tourbillon expérimental ? (On donne $\nu_{\text{eau}} = 10^{-6}$ S.I.)

L'expérimentateur décide que malgré les différences de valeur de Re entre les réponses aux questions **a)** et **b)**, l'expérience en laboratoire reste quand même pertinente pour l'étude de la dynamique d'un tourbillon atmosphérique. Comprenez-vous pourquoi ? Expliquez.

c) L'expérimentateur souhaite maintenant prédire analytiquement la forme du champ de vitesse en tout point de l'écoulement. Il utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec le centre du système de coordonnées O au centre du disque et \vec{e}_z pointant vers le haut. Pour résoudre le champ de vitesse en tout point il fait un certain nombre d'hypothèses fortes. Il suppose que

- le fluide est supposé incompressible,
- l'écoulement est stationnaire (le terme $\partial \vec{u} / \partial t = \vec{0}$ dans l'équation de Navier–Stokes),
- l'écoulement est supposé bidimensionnel : si on prend le champ de vitesse à une hauteur z_0 , celui-ci sera invariant en fonction de z , $\vec{u}(r, \theta, z) = \vec{u}(r, \theta, z_0) \quad \forall z$,
- il n'y a pas de vitesse selon l'axe (Oz) ,
- l'écoulement est supposé à symétrie de révolution autour d'un axe (Oz) ,
- le fluide **au dessus** du disque ($0 < r < R_D$) tourne à la même vitesse que le disque, on dit que le fluide est en rotation « solide » avec le disque,
- le fluide suit un écoulement de type Couette cylindrique **autour du disque** ($R_D < r < R$); cet écoulement est caractérisé par un champ de vitesse satisfaisant $u_\theta(r) = C_1 r + C_2 / r$ où C_1 et C_2 sont deux constantes.

Une partie de ces hypothèses revient à considérer ici que l'on ne tient pas compte d'une part de la condition de non glissement en $z = 0$ pour $R_D < r < R$, et que l'on ne tient pas compte d'autre part de la condition de surface libre en $z = h$.

i) Que nous apporte l'équation de la conservation de la masse concernant u_r ?

ii) Projeter l'équation de Navier–Stokes selon (Or) et $(O\theta)$. Que traduit l'équation selon (Or) en terme de pression ?

iii) Comment se traduit la rotation solide au dessus du disque ? Pour répondre à cette question on exprimera u_θ en fonction de r et de ω . Est-ce que cette rotation solide satisfait l'équation de

Navier–Stokes projetée selon $(O\theta)$ pour $0 < r < R_D$?

iv) Déterminer le champ de vitesse pour $R_D < r < R$ en suivant les hypothèses.

v) En conclure que le champ de vitesse peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} u_\theta(r) = a r \text{ pour } 0 < r < R_D \\ u_\theta(r) = b r - \frac{bR^2}{r} = b \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \text{ pour } R_D < r < R \end{cases}$$

où l'on précisera les valeurs des constantes a et b .

Ce dernier résultat permet de poursuivre l'exercice même si les constantes a et b n'ont pas été déterminées. Il est d'ailleurs conseillé de continuer à écrire le champ de vitesse en fonction de a et de b pour alléger les notations dans la suite de l'exercice.

vi) Tracer qualitativement $|\vec{u}_\theta|$ en fonction de r pour $0 < r < R$

vii) En déduire la distribution du champ de pression en fonction du rayon à l'aide de l'équation de Navier–Stokes projetée selon (Or) . On utilisera comme unique condition limite la continuité du champ de pression entre les deux zones de l'écoulement en $r = R_D \forall z$. A noter que le champ de pression $P(r, z)$ obtenu sera déterminé à une fonction $F(z)$ près, non déterminée.

d) Notre expérimentateur réalise maintenant que si le fluide est en rotation à une certaine vitesse au sein du tourbillon, la surface libre au sommet du tourbillon ne sera pas plate mais bien « creusée » au fur et à mesure que la vitesse augmente (phénomène analogue au tourbillon creux qui se développe au dessus du trou d'une baignoire lorsque celle-ci se vide). Dans cette partie de l'exercice, on va calculer la topographie de la surface libre en supposant que le fluide suit le champ de vitesse bidimensionnel obtenu en **c) v)**.

Ce calcul va servir à l'expérimentateur à déterminer si la topographie de la surface libre lorsque le moteur est rotation à ω_{max} n'est pas plus grande que la hauteur totale du cylindre.

i) Projeter l'équation de Navier–Stokes selon (Oz) . En déduire à l'aide du résultat de la question **c) vii)** le champ de pression $P(r, z)$ pour $0 < r < R_D$ et $0 < z < h(r)$ où $h(r)$ désigne la hauteur totale d'eau au sein du tourbillon en mouvement.

ii) Utiliser la condition limite de la fonction $P(r, z)$ au point le plus bas de la surface libre, c'est à dire en $z = h(r = 0)$ et $r = 0$, afin de déterminer la constante laissée en suspens à la question **i)**. On notera la pression atmosphérique P_0 .

iii) Écrire la condition limite de la fonction $P(r, z)$ en tout point de la surface libre pour $0 < r < R_D$ et en déduire la topographie maximale au cœur de l'écoulement entre $r = 0$ et $r = R_D$ lorsque le moteur est à la vitesse maximale ω_{max} . On prendra $|g| = 10$ S.I. Est-ce que le cylindre de hauteur 30 cm de l'expérimentateur sera suffisant pour conduire une expérience à ω_{max} ?

**Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de
l'Environnement, Université Joseph-Fourier**

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

Examen

Jeudi 4 Janvier 2007 – *Durée* : 3 heures

*Calculatrice autorisée. Le formulaire distribué en cours est le seul document autorisé durant
l'épreuve.*

On vous demande d'être concis, précis et rigoureux dans la réponse aux questions.

Exercice 1 – Écoulement d'un glacier

On considère l'écoulement permanent d'un glacier, un fluide que l'on considérera newtonien, visqueux, isotherme, incompressible. Le glacier se situe sur une montagne assimilée à un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On note ρ la masse volumique du fluide et μ sa viscosité dynamique.

La surface libre du glacier est supposée à hauteur constante L . La pression P_0 est supposée constante à la surface du glacier. On suppose que la vitesse du glacier est en tout point parallèle à (Ox) (voir figure 1). On traite un problème bidimensionnel selon les directions (Ox) et (Oy) uniquement, en supposant que l'on n'a pas de variation de grandeurs physiques selon la direction (Oz) .

a) En tenant de compte la stationnarité de l'écoulement écrire l'équation du mouvement et l'équation de continuité. Quelle propriété caractéristique de l'écoulement peut-on déduire de l'équation de continuité ? Quelle est la condition aux limites à écrire en $y = 0$ pour le champ de vitesse ? Quelle est l'allure qualitative du champ de vitesse du glacier (ne pas calculer le champ de vitesse) ?

En utilisant l'équation du mouvement projetée selon (Oy) ainsi qu'une condition limite, montrer que la répartition de pression selon y est indépendante de x .

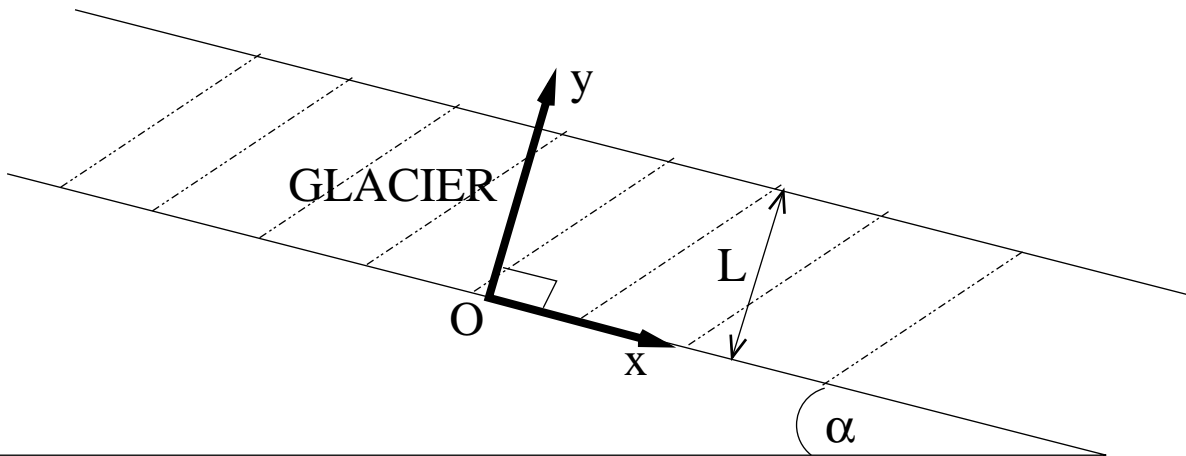


FIG. 1 – Schématisation de la dynamique d'un glacier.

b) Adimensionner l'équation de Navier–Stokes projetée selon (Ox) , en utilisant L et U comme échelles caractéristiques de longueur et de vitesse. Démontrer que l'équation de Navier–Stokes adimensionnée et projetée selon (Ox) se ramène à une équation du type

$$\beta + \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial^2 y^*} = 0,$$

où les grandeurs adimensionnées sont notées avec une étoile et β est une constante que l'on déterminera. Vérifier que β est sans dimension.

c) Quelle est la signification physique du paramètre β ?

d) Comment utiliseriez-vous ce paramètre β pour reproduire expérimentalement en laboratoire l'écoulement d'un tel glacier ?

Exercice 2 – Spectre spatial du champ magnétique terrestre

On rappelle que le champ magnétique terrestre à l'extérieur du noyau terrestre dérive d'un potentiel scalaire magnétique V défini par

$$V(r, \theta, \phi) = r_E \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_E}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta) (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi), \quad (1)$$

où r_E est le rayon de la Terre, n et m désignent le degré et l'ordre de l'harmonique sphérique respectivement, P_n^m sont les polynômes de Legendre et (g_n^m, h_n^m) les coefficients de Gauss.

a) Pourquoi est-il possible d'écrire le champ magnétique terrestre sous la forme d'un potentiel scalaire ? Quelle est la relation entre le champ magnétique \vec{B} et le potentiel scalaire V ?

b) Commenter les 3 cartes de la figure 2. On vous demande notamment d'expliquer les caractéristiques générales du champ magnétique qui ressortent de ces cartes, d'expliquer les différences majeures entre les différentes cartes, d'expliquer brièvement comment elles sont obtenues, avec quelles hypothèses, etc...

c) Le développement en harmoniques sphériques permet aussi d'écrire le champ \vec{B} en un point de l'espace sous la forme :

$$\vec{B} = \sum_{n=1}^N \left(B_{r,n} \vec{e}_r + B_{\theta,n} \vec{e}_\theta + B_{\phi,n} \vec{e}_\phi \right) = \sum_{n=1}^N \vec{B}_n.$$

Cette décomposition revient à écrire le champ magnétique total en une somme de champs multipolaires : $n = 1$ correspond au champ d'ordre 1 (champ dipôle), $n = 2$ correspond au champ d'ordre 2 (champ quadripôle), etc... N étant le degré maximum jusqu'où l'on cherche à décrire le champ magnétique.

On introduit alors la notion de spectre spatial de \vec{B} défini par l'application :

$$n \rightarrow R(n) = \|B_n\|^2 = \frac{1}{4\pi} \int \int_{S(r)} |\vec{B}_n|^2 dS.$$

On peut démontrer que $R(n)$ est donné, en fonction des coefficients de Gauss, par l'expression

$$R(n) = (n+1) \left(\frac{r_T}{r}\right)^{2n+4} \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2].$$

Le spectre magnétique est introduit pour quantifier l'importance relative des différents degrés (différents n) en terme d'énergie magnétique dans le développement en harmonique sphérique de \vec{B} .

La figure 3 donne le spectre spatial (plus précisément $R(n)^2$) du champ magnétique calculé à la surface terrestre en $r = r_T$ (obtenu à partir des données du satellite Magsat en 1981). Le spectre est représenté jusqu'à $n = 13$ car, au delà, le champ magnétique d'origine crustal interfère avec le champ d'origine interne. Jusqu'au degré $n = 13$, seul le champ magnétique d'origine interne apparaît.

Que remarquez vous concernant le degré $n = 1$? Comment le comprenez-vous ?

Quelle serait l'allure de ce spectre à l'interface Noyau-Manteau ? On vous demande en particulier de dire si la pente du spectre de la figure 3 à l'interface Noyau-Manteau serait accentuée ou diminuée par rapport à la pente à la surface terrestre (réponse qualitative demandée).

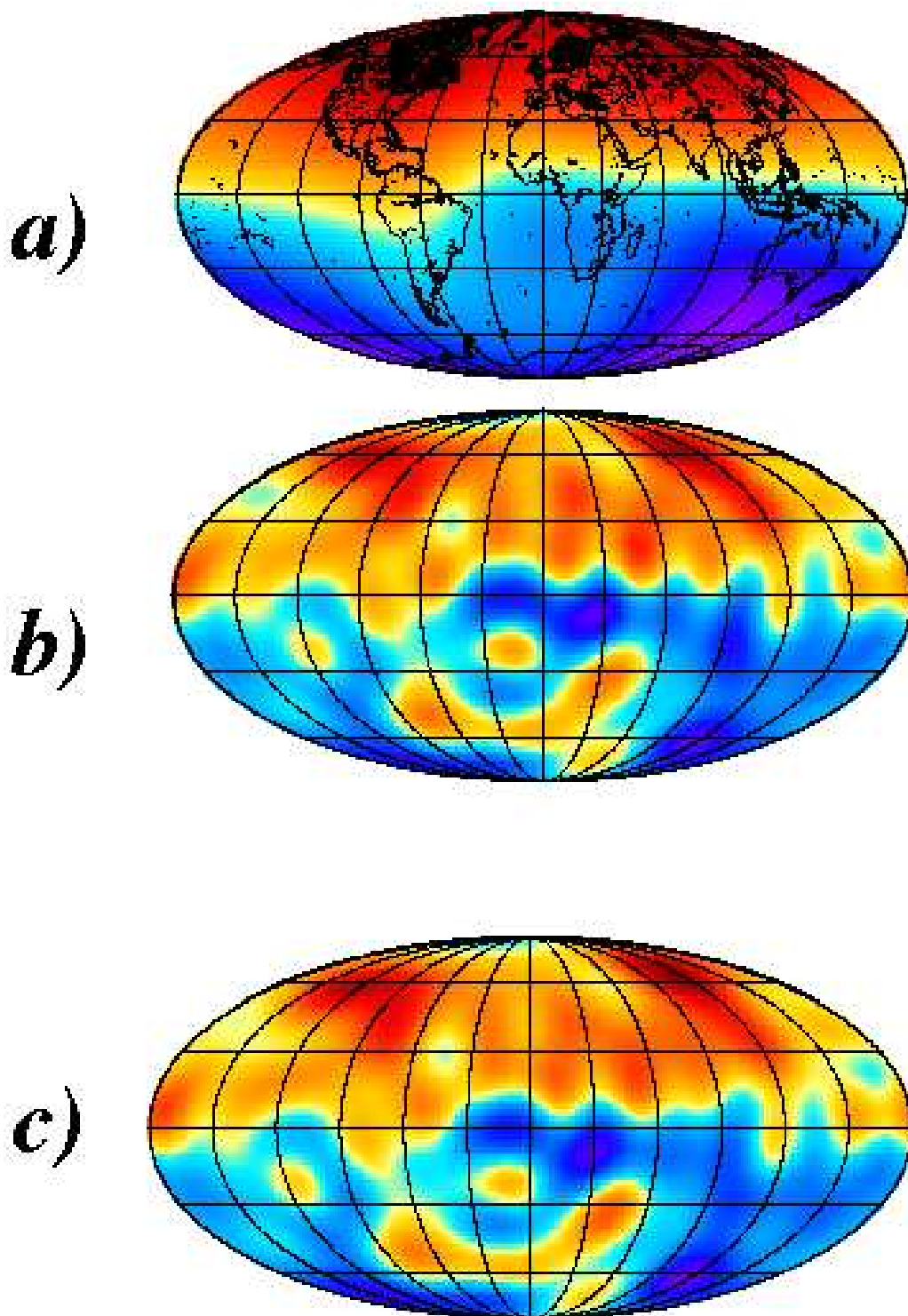


FIG. 2 – a) Composante radiale du champ magnétique mesurée par le satellite Ørsted en 2000, ramenée à la surface terrestre ; b) Composante radiale du champ magnétique mesurée par le satellite Ørsted en 2000, ramenée à la frontière Noyau-Manteau ; c) Composante radiale du champ magnétique mesurée par le satellite Magsat en 1981, ramenée à la frontière Noyau-Manteau. La couleur rouge signifie que le champ mesuré est négatif, la couleur bleue qu'il est positif.

Spectre du champ magnétique terrestre

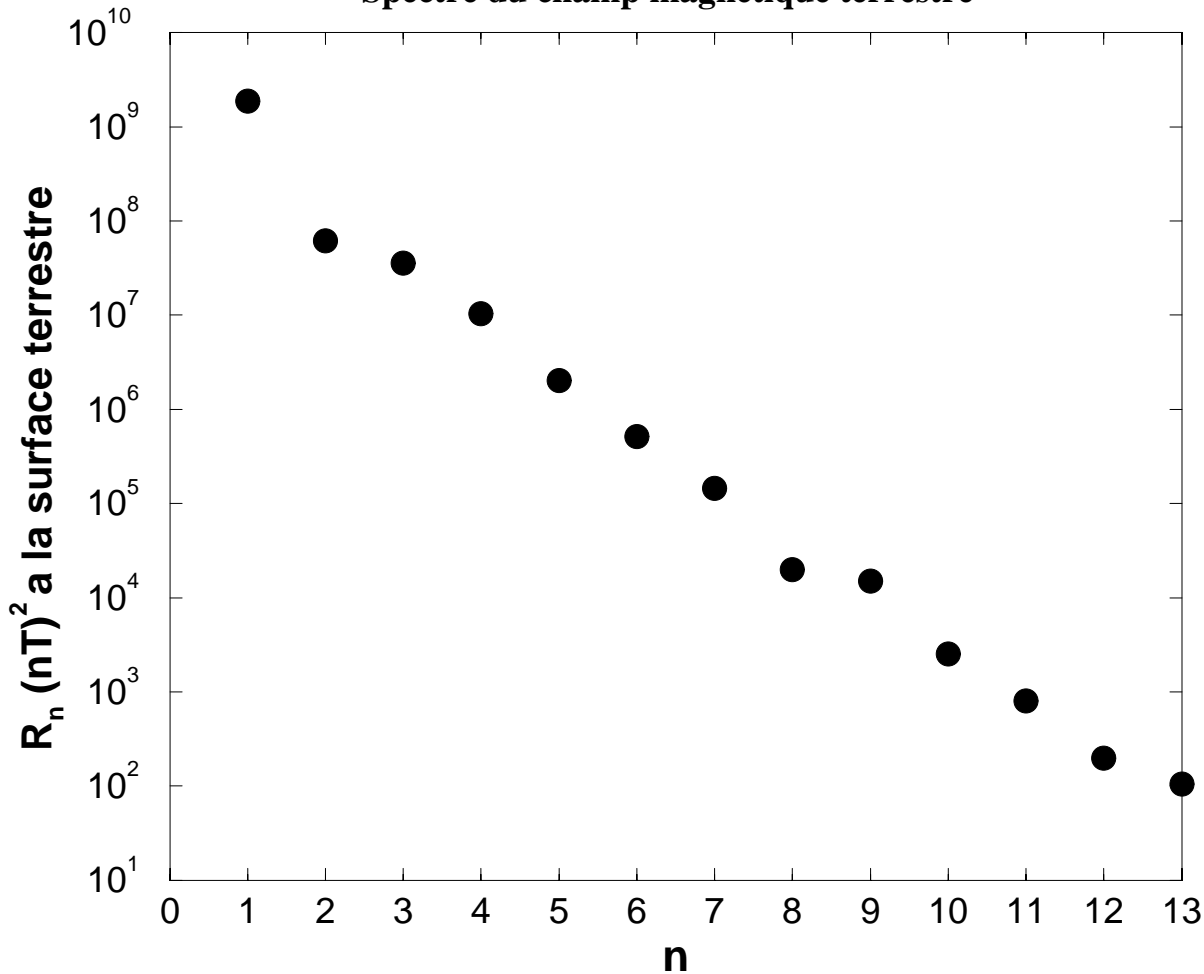


FIG. 3 – Spectre du champ magnétique à la surface terrestre.

Est-ce que les spectres à la surface terrestre (figure 3) et à l'interface Noyau-Manteau (réponse à la question précédente) sont en accord avec les cartes de champ magnétique de la figure 2 (voir question b)) ?

d) Calculer l'intensité du champ dipolaire ($\|B_1\|$) à la surface terrestre.

On utilisera notamment les valeurs des coefficients de Gauss d'ordre 1 données par Magsat $g_1^0 = -29\,775$ nT, $g_1^1 = -1\,851$ nT et $h_1^1 = 5\,411$ nT ($1\text{nT} = 10^{-9}\text{T}$).

On vérifiera que $\|B_1\|$ peut s'écrire aussi en fonction de l'intensité du moment dipolaire \mathcal{M} à l'aide de la relation suivante :

$$\|B_1\| = \frac{\sqrt{2}\mu_0}{4\pi r_E^3} \mathcal{M}, \text{ avec } \mathcal{M} = \frac{4\pi r_T^3}{\mu_0} \left[(g_1^1)^2 + (h_1^1)^2 + (g_1^0)^2 \right]^{1/2}.$$

e) Admettons que pour $n \geq 2$ on peut écrire $R(n)$ sous la forme

$$R(n) = e^{(21.02 - 1.309n)}.$$

Calculer l'intensité du champ non dipolaire

$$\|B_{nd}\| = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \|B_n\|^2 \right)^{1/2}.$$

Remarques : i) pour ce calcul il est plus aisé mathématiquement de faire la somme de tous les degrés n jusqu'à l'infini plutôt que de s'arrêter au degré 13. Du point de vue de la précision du résultat final, cela n'a qu'une incidence marginale dans la mesure où l'essentiel de l'énergie magnétique est contenue dans les termes de bas degrés. ii) Pour calculer l'intensité moyenne du champ non dipolaire, on pourra utiliser le résultat de la suite géométrique suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q^1 + q^2 + q^3 + \dots = \frac{q}{1-q}$$

valable pour tout $|q| < 1$.

On démontrera que :

$$\|B_{nd}\| = \left(e^{21.02} \frac{e^{-2.618}}{1 - e^{-1.309}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Combien vaut le rapport $\|B_1\|/\|B_{nd}\|$?

f) Supposant

- i) que le champ non dipolaire reste constant en moyenne au cours du temps,
- ii) que le moment dipolaire suit la loi de décroissance

$$\mathcal{M}(t) = [8.27 - 4.9 \times 10^{-3}(t - 1900)] \times 10^{22} \text{ Am}^2$$

où t est le temps exprimée en **année**,

iii) qu'il se produit une inversion lorsque le champ dipolaire est du même ordre de grandeur que le champ non dipolaire soit $\|B_1\| \approx \|B_{nd}\|$, estimer la date de la prochaine inversion du champ magnétique terrestre.

Application numérique : $r_E = 6371 \text{ km}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I.}$

Exercice 3 – Tache rouge de Jupiter

La grande tache rouge de Jupiter a été découverte en 1655 par Cassini. Depuis, des missions spatiales ont permis de mieux la connaître : c'est un tourbillon qui, comme un ouragan terrestre, est matérialisé par les masses nuageuses qu'il entraîne. Il leur faut six jours (terrestres) pour faire le tour de la tache dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. La planète fait, quant à elle un tour sur elle-même en dix heures.

On considérera l'atmosphère de Jupiter comme un fluide visqueux, incompressible et isotherme (température constante).

Remarque : L'énoncé contient beaucoup d'informations, relisez-le régulièrement au cours de l'exercice.

a) Calculer Ω la vitesse angulaire de Jupiter puis ω_0 la vitesse angulaire des masses nuageuses autour de la tache.

b) L'extension verticale de l'atmosphère de Jupiter est faible par rapport à sa taille horizontale. On est donc dans un cadre où on peut appliquer l'approximation de couche mince de fluide.

On se donne les grandeurs caractéristiques suivantes pour l'atmosphère de Jupiter : L une longueur caractéristique horizontale, H une longueur caractéristique verticale, U une vitesse caractéristique horizontale et W une vitesse caractéristique verticale.

En utilisant la propriété d'incompressibilité du fluide de l'atmosphère jovienne, montrer comment une des composantes du vecteur vitesse peut être négligée devant les deux autres dans le cadre de l'approximation de couche mince.

c) Écrire l'équation de Navier-Stokes dans le repère en rotation avec la planète Jupiter dans l'hypothèse où le mouvement est stationnaire ($\partial \vec{u} / \partial t = \vec{0}$). On supposera que le gradient de pression $-\vec{\nabla} P$ regroupe la pression, la force centrifuge (liée au changement de repère) et le poids.

Donner la signification physique des différents termes de l'équation.

d) Dans l'équation de Navier-Stokes, quelle est la force qui, comme dans l'atmosphère terrestre, influence les mouvements de grande échelle de l'atmosphère de Jupiter ? Justifier en une phrase.

On considère par la suite que la force liée à la viscosité de l'atmosphère est négligeable dans l'équation de Navier-Stokes précédemment écrite.

e) On s'intéresse maintenant à un calcul d'ordre de grandeur des termes présents dans l'équation de Navier-Stokes obtenue à la question c) puis simplifiée à la question d).

On étudie un tourbillon, par conséquent une longueur caractéristique L appropriée est le rayon du tourbillon et une vitesse caractéristique U appropriée est la vitesse à la périphérie du tourbillon. Comment peut-on relier U , L et ω_0 ?

Montrer maintenant que le terme d'inertie non linéaire peut être négligé devant la force de Coriolis.

On aboutit alors à l'équation qui décrit l'équilibre géostrophique :

$$2\rho \vec{\Omega} \times \vec{u} = -\vec{\nabla} P$$

où \vec{u} représente le vent géostrophique, ici le vent horizontal du tourbillon.

Cette même équation peut se récrire

$$\vec{u} = \frac{1}{2\rho\Omega \sin \varphi} \vec{k} \times \vec{\nabla} P \quad (2)$$

où \vec{k} est le vecteur porté par la verticale locale et φ la latitude.

f) En utilisant la formule (2), montrer à l'aide d'un schéma simple dans quel hémisphère se trouve la tache sachant que contrairement aux cyclones terrestres, la tache rouge de Jupiter correspond à un maximum de pression. On vous demande un schéma du type de ceux décrits lors du TD ④ où figurent \vec{u} , $\vec{\Omega}$ et $\vec{\nabla}P$.

g) Des observations ont montré que la vitesse des vents à la périphérie de la tache est de l'ordre de 350 km/h. La densité moyenne de l'atmosphère jovienne est de l'ordre de $3 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$. La valeur absolue de la latitude moyenne de la tache est $|\varphi| = 22$ degrés et le rayon moyen de celle-ci est de 15 000 km.

En utilisant le modèle développé dans cet exercice, en particulier en utilisant la formule (2), quelle devrait être l'amplitude de la différence de pression ΔP (entre la périphérie et le centre du tourbillon) donnant naissance à des vents d'une telle ampleur. Qu'en pensez-vous ?
