

Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

TD ⑤ Géomagnétisme et dynamique du noyau terrestre

Exercice 1 – Croissance de la graine terrestre

On suppose que la graine solide au centre de la Terre a commencé à cristalliser dès la formation de la Terre au temps $t = 0$. On suppose également que le taux volumique de cristallisation du noyau liquide est resté constant ; en d'autres termes, le volume de la graine croît linéairement.

a) En tenant compte de ces hypothèses, quel est le taux de croissance actuelle de la graine en rayon (en mm/an) ?

b) Combien de tonnes de fer cristallisent par seconde dans le noyau ?

A.N. : On donne $\bar{\rho}_{\text{Fer liquide noyau}} = 12 \cdot 10^3 \text{ kg / m}^3$.

c) Auriez-vous un modèle thermique plus réaliste à proposer concernant la cristallisation de la graine ?

Exercice 2 – Le dipôle magnétique

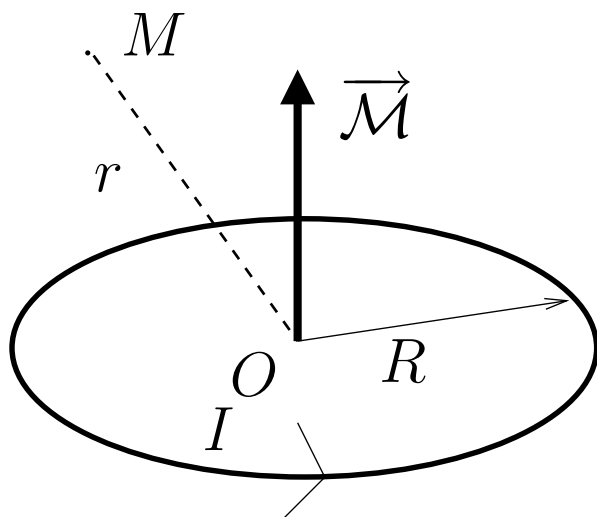


FIG. 1 – Anneau parcouru par un courant I de courant donnant naissance à un champ magnétique dipolaire.

Soit un anneau de rayon R parcouru par un courant I . On définit le moment magnétique de la spire $\vec{M} = IS\vec{n}$ où S est la surface horizontale intérieure à l'anneau de courant et $\vec{n} = \vec{e}_z$ est le vecteur unitaire normal au plan horizontal.

Si l'on se place en un point M tel que $r \gg R$, on démontre que le champ magnétique généré au point M par la spire de courant s'écrit

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{M}}{r^3} \right]. \quad (1)$$

a) En utilisant un repère de coordonnées sphériques centré en O sur la figure 1, déduire de (1) les composantes B_r , B_θ et B_ϕ du champ magnétique au point M . On supposera que $\vec{M} = M\vec{e}_z$. Pourquoi la composante $B_\phi = 0$?

b) On cherche à tracer les lignes de champ magnétique associées à la boucle de courant ; par

définition, les lignes de champ de \vec{B} sont des courbes tangentes au vecteur \vec{B} en chaque point.

Pour tracer les lignes de champ dans notre problème, on écrit que si l'on se déplace dans le plan défini par $(\vec{\mathcal{M}}, M)$ d'un point M à un point M' (tel que $\overrightarrow{MM'} = d\vec{M} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta$) le long d'une ligne de champ, alors nécessairement $d\vec{M}$ est **colinéaire** au champ \vec{B} ou encore $d\vec{M} = k\vec{B}$ où k est une constante.

Écrire l'expression des lignes de champ magnétique et en tracer quelques unes.

c)

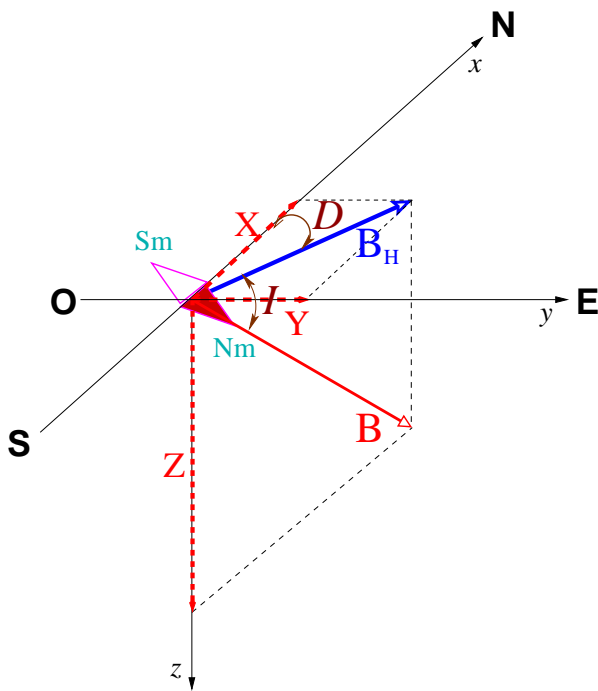


FIG. 2 – Illustration des éléments du champ magnétique terrestre avec la déclinaison D et l'inclinaison I . B_H est la projection sur le plan horizontal du vecteur champ magnétique. X , Y et Z sont les composantes du champ magnétique terrestre projetées respectivement selon la direction Sud–Nord, la direction Ouest–Est et la direction Haut–Bas.

- Par définition, la déclinaison D est l'angle entre le Nord Géographique et la composante horizontale du champ magnétique terrestre mesurée en surface. Elle est comptée positivement vers l'Est.
- L'inclinaison I est l'angle entre le champ magnétique total et sa composante horizontale. Elle est comptée positivement vers le bas.

Écrire les relations entre X , Y , Z et B , B_H , I et D .

d) On fait maintenant l'hypothèse que le champ magnétique de la Terre est un dipôle axial dont l'axe de symétrie est confondu avec l'axe de la rotation de la Terre. Avec ces hypothèses, écrire les relations existant entre B_r et Z d'une part et entre B_H et B_θ d'autre part.

Sachant que les *isogones* sont des lignes d'égale valeur de déclinaison magnétique à la surface terrestre et les *isoclines* des lignes d'égale valeur d'inclinaison magnétique à la surface terrestre, à quoi ressembleraient les cartes d'isogones et d'isoclines dans le cas d'un dipôle axial centré ?

Calculer la norme de \vec{B} en tout point de la surface terrestre en fonction de \mathcal{M} dans le cas d'un dipôle axial centré. Est-ce que la norme de \vec{B} est plus grande aux pôles géographiques ou à

l'équateur.

e) À Chambon la Forêt (Observatoire magnétique de Paris), le champ magnétique vaut :

$$\begin{aligned}Z &= 42784 \text{ nT} \\B_H &= 20948 \text{ nT}\end{aligned}$$

En supposant toujours que le champ magnétique est produit par un dipôle centré, comment est orienté le moment magnétique du champ magnétique terrestre dipolaire ? Quelle est la latitude géographique de Chambon déduite de Z et B_H ? Commenter la précision de cette détermination.

Calculer le moment dipolaire du champ magnétique terrestre à partir des mesures du champ à Chambon. Pourquoi les deux composantes donnent-elles un moment dipolaire différent ? ($R_T = 6371\text{Km}$).

Exercice 3 – Explorateur

Un explorateur a lu dans le vieux grimaire chinois que la boussole indiquait toujours la direction sud-nord géographique. Il se fie à cette croyance et décide d'atteindre le pôle Sud géographique en suivant à chaque instant la direction Sud indiquée par la boussole. Il part du point A indiqué sur la figure 3. Dessiner approximativement le chemin qu'il parcourt, sachant que la projection stéréographique utilisée conserve les angles (donc un angle entre 2 directions tracées sur la sphère reste invariant par projection).

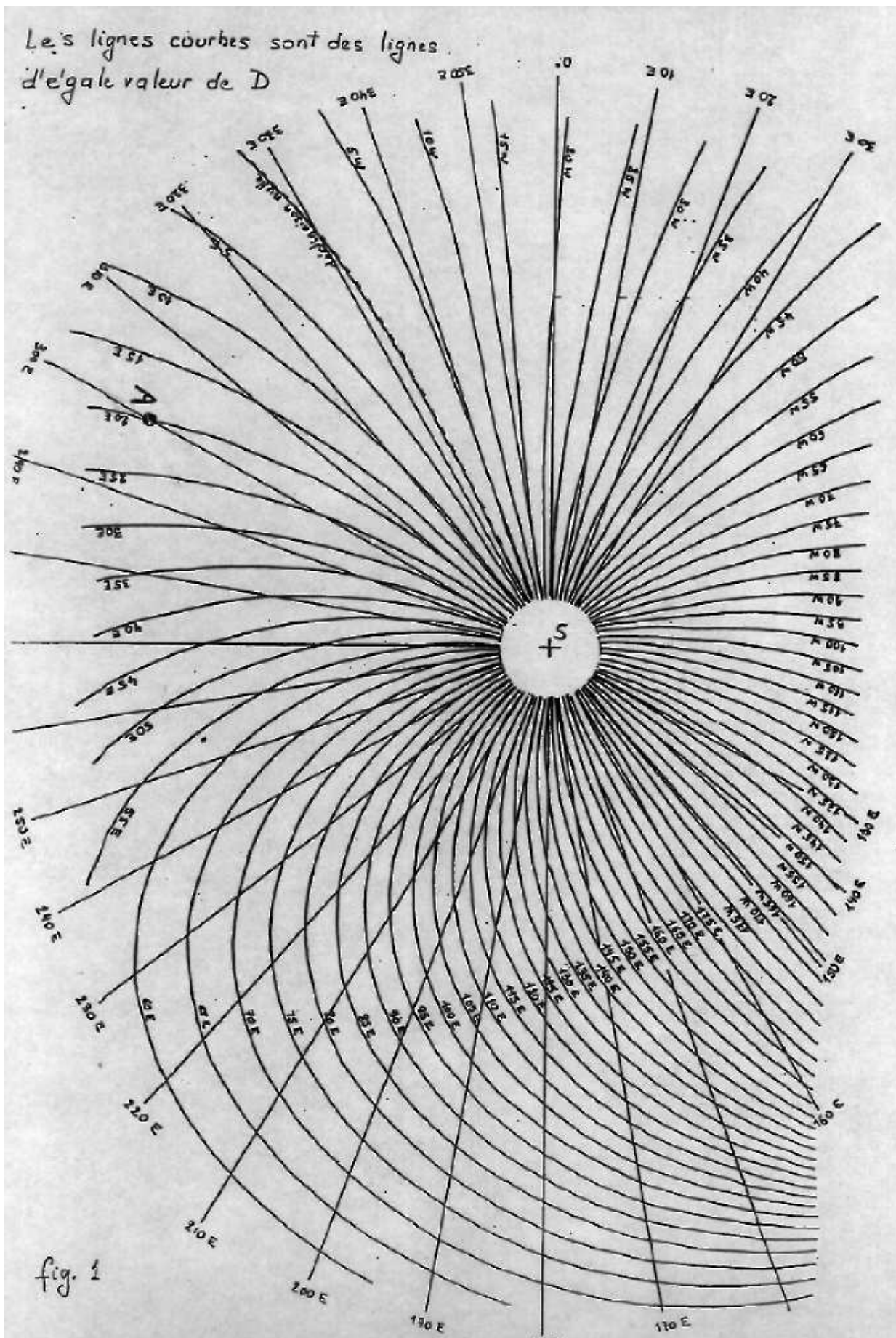


FIG. 3 – Vue du pôle Sud géographique des isogones et des lignes de longitude. L'explorateur part du point A.

Exercice 4 – Désaimantation thermique

On désaimante thermiquement un échantillon prélevé dans un grès vosgien daté du trias (220 millions d'années). Le champ paléomagnétique de l'échantillon B_x , B_y et B_z est mesuré à chaque température ; les direction x, y, z correspondent respectivement aux directions Sud-Nord, Ouest-Est et Haut-Bas du site de prélèvement. Les mesures sont reportées sur le tableau 1 et sur la figure 4.

T(°C)	B_y	B_z	B_x
20	0.47	0.04	0.30
100	0.39	0.07	0.45
200	0.33	0.094	0.86
300	0.25	0.072	0.65
400	0.12	0.034	0.31
500	0.02	0.005	0.005

On utilisera dans cet exercice les expressions reliant les composantes X, Y et Z du champ magnétique à l'inclinaison et à la déclinaison du champ magnétique.

TAB. 1 – Champs paléomagnétiques B_x , B_y et B_z en fonction de la température de chauffage.

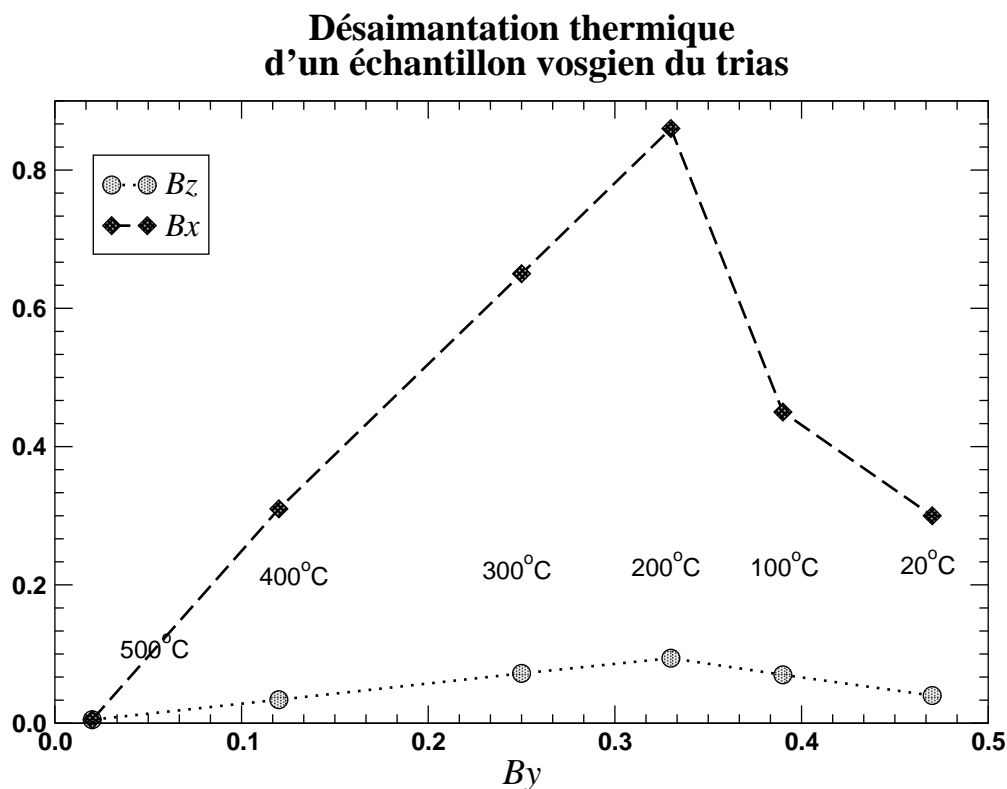


FIG. 4 – Courbes de désaimantation d'un grès vosgien triassique.

a) Comment peut-on expliquer l'allure générale des courbes de désaimantation ? Quel est le moyen d'obtenir l'inclinaison et la déclinaison magnétiques à partir de ces mesures ?

A l'aide de la mesure de l'inclinaison, que peut-on dire qualitativement de la position des Vosges à la surface terrestre durant le Trias ?

NB : Pour répondre à la dernière question, on utilisera la relation fondamentale du paléomagnétisme en précisant ses hypothèses.

b) Lorsque l'on mesure une inclinaison et une déclinaison en un point connu à la surface terrestre, il est possible de déterminer la position du *pôle géomagnétique virtuel (PGV)* correspondant, en supposant que le champ magnétique terrestre est parfaitement dipolaire mais pas né-

cessairement aligné avec l'axe de rotation de la Terre.

Voici les formules mathématiques donnant la location du *PGV* : on part de $\tan I = 2 \cot p$ où p est la colatitude magnétique du pôle par rapport au site de prélèvement, I est l'inclinaison mesurée.

En utilisant la trigonométrie sphérique classique, on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda_P &= \sin^{-1} (\sin \lambda_S \cos p + \cos \lambda_S \sin p \cos D) \\ \beta &= \sin^{-1} \left(\frac{\sin p \sin D}{\cos \lambda_P} \right) \\ \text{et si } \cos p &\geq \sin \lambda_P \sin \lambda_S \rightarrow \Phi_P = \Phi_S + \beta \\ \text{ou si } \cos p < &\sin \lambda_P \sin \lambda_S \rightarrow \Phi_P = \Phi_S + \pi - \beta\end{aligned}$$

où λ_P est la latitude géographique du pôle magnétique, λ_S est la latitude géographique du site, β est la différence de longitude entre le pôle et le site, Φ_P est la longitude du pôle et Φ_S est la longitude du site.

Application : La position actuelle des Vosges est 48°N et 5°E. Déduire la position apparente du *PGV* dans les Vosges durant le Trias.

Expliquer pourquoi les réponses aux questions a) et b) sont cohérentes.

c) Les mêmes mesures paléomagnétiques sont effectuées dans l'Oural (position actuelle : 60°N, 60°E) pour un échantillon daté du Trias ; on obtient une inclinaison égale à 56.2° et une déclinaison égale à 59.90°. Que peut-on en conclure ?

Exercice 5 – Dérive des continents

Exercice tirée de « Problèmes résolus de Sciences de la Terre et de l'Univers », J.Y. Daniel, Vuibert, 2000.

Considérons un exemple d'îles volcaniques liées à l'activité d'un point chaud : l'archipel des îles des Empereurs, dont la terminaison orientale est l'archipel d'Hawaii (figure 5). On observe des âges radiochronologiques croissant en s'éloignant du panache actuel. Le point chaud d'Hawaii est considéré comme l'un des plus représentatifs des points chauds. Avec ses homologues du Pacifique, il constitue un référentiel dit absolu. C'est en étudiant les traces de chapelets d'îles que l'on parvient à donner une image du déplacement absolu des plaques.

Des données paléomagnétiques très récentes sont venues fragiliser l'hypothèse d'un référentiel absolu de ce point chaud pour des âges anciens (> 40 Ma). Nous allons voir pourquoi.

a) Si Hawaii (latitude $\lambda = 19^\circ\text{N}$) est un point chaud fixe, quelles sont les inclinaisons paléomagnétiques que l'on devrait trouver fossilisées dans les laves volcaniques des îles de Detroit ($\lambda = 52^\circ\text{N}$) et Suiko ($\lambda = 44^\circ\text{N}$) ?

En réalité, ce que l'on observe est donné dans la table 2.

Site	Age (10 ⁶ ans)	Latitude	Inclinaisons fossiles
Detroit	82	52°N	-55,5°
Suiko	65	44°N	+45,5°

TAB. 2 – Mesures d'inclinaisons paléomagnétiques sur les îles de Detroit et Suiko.

b) Comment expliquer les inclinaisons positives et négatives ?

c) Calculer la vitesse de déplacement de la plaque au dessus du point chaud déduite de l'espacement des deux îles. On supposera un alignement N-S des deux îles. Donner les résultat en

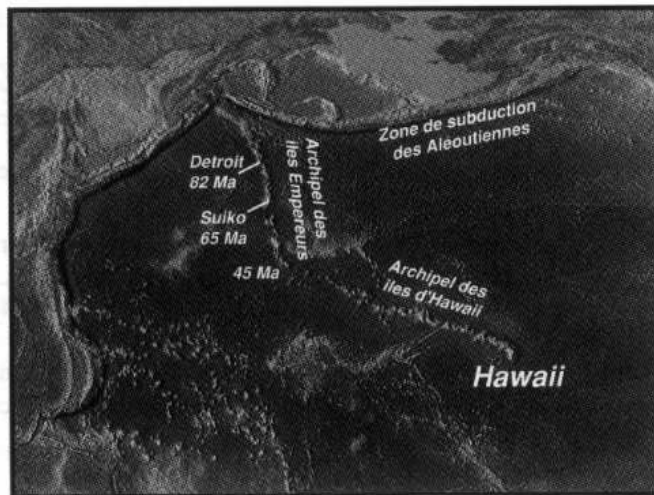


FIG. 5 – Carte topographique illustrant la trace du point chaud d'Hawaii.

cm/an.

- d) Calculer la vitesse maximale de déplacement déduite des données paléomagnétiques.
- e) En comparant les deux vitesses ainsi calculées, que peut-on en déduire ?

Exercice 6 – Dipôle terrestre

a) On écrit généralement le champ magnétique terrestre à l'extérieur du noyau terrestre sous la forme $\vec{B} = -\text{grad } V$. Comment appelle-t-on V dans ce cas ? Quelle propriété physique du manteau nous autorise à écrire cette relation ?

Dans la suite de l'exercice nous nous intéressons qu'aux composantes dipolaires du champ magnétique.

b) Est-il réaliste de modéliser le champ magnétique terrestre en ne tenant compte que des composantes dipolaires ? Commentez. Quelle grandeur physique caractérisant le champ magnétique doit-on mesurer en un site pour avoir une idée de la latitude géographique à laquelle on se trouve ? Dans ce cas, quelle relation utilise-t-on et sous quelles hypothèses est-elle valable ?

c) Une des écritures possibles d'un champ magnétique dipolaire se fait via le potentiel magnétique généré par la plus petite entité magnétique, une boucle de courant ou dipôle magnétique ; on obtient

$$V(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{M} = M_x \vec{e}_x + M_y \vec{e}_y + M_z \vec{e}_z \quad \text{avec } \vec{r} = \overrightarrow{OM} \quad (2)$$

où \vec{M} est le moment magnétique et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ S.I.

En développant le produit scalaire entre le vecteur moment magnétique \vec{M} écrit en coordonnées cartésiennes et le vecteur rayon \vec{r} écrit en coordonnées sphériques, en déduire l'expression de V en fonction de $M_x, M_y, M_z, r, \theta, \phi$.

(Pour cela on pourra s'aider de la figure 6).

- d) Une autre écriture possible du champ magnétique total extrait du noyau terrestre consiste

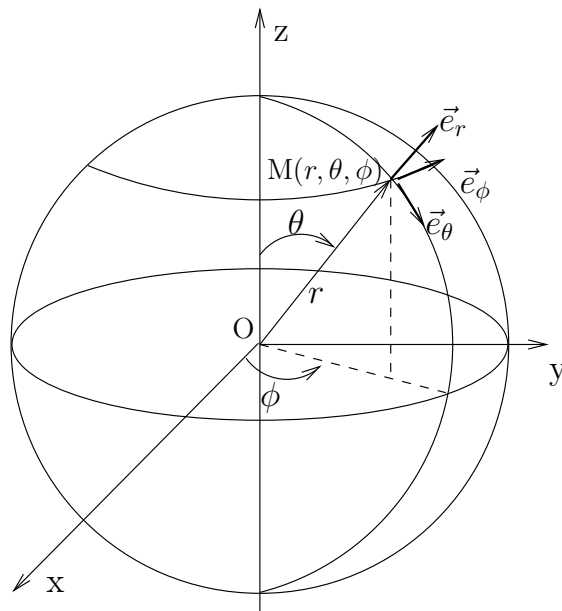


FIG. 6 – Système de coordonnées sphériques.

à utiliser un développement en harmonique sphériques du potentiel magnétique :

$$V(r, \theta, \phi) = r_T \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_T}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta) [g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi] \quad (3)$$

où r_T est le rayon de la Terre, n et m désignent respectivement le degré et l'ordre de l'harmonique sphérique, P_n^m sont les polynômes de Legendre et g_n^m, h_n^m les coefficients de Gauss.

Écrire le potentiel magnétique de degré $n = 1$: c'est le potentiel associé aux composantes dipolaires.

Dans quelles unités s'expriment les coefficients de Gauss. Justifiez la réponse à l'aide d'arguments dimensionnels.

On donne $P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta$; $P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta$.

e) En comparant les expressions de V obtenue aux deux questions précédentes, écrire les relations entre $\mathcal{M}_x, g_1^0, \mathcal{M}_y, g_1^1, \mathcal{M}_z, h_1^1$.

f) Considérez les 3 cas où $g_1^0 \gg g_1^1, h_1^1$, $g_1^1 \gg g_1^0, h_1^1$ et $h_1^1 \gg g_1^0, g_1^1$.

En déduire la signification physique de ces trois coefficients de Gauss.

Si la signification de ces termes ne vous apparaît pas directement, une autre façon de poser la question est : quelle est la géométrie du champ dans ces 3 cas ? Pour cela, il est judicieux d'écrire la composante radiale du champ B_r en $r = R_T$ et d'étudier son amplitude et sa variation spatiale en fonction des 3 cas.

g) Dans le cas de la Terre $g_1^0 = -29\,775$ nT, $g_1^1 = -1\,851$ nT et $h_1^1 = 5\,411$ nT. En vous reposant sur ce que vous avez appris en cours sur l'allure du champ magnétique terrestre, ces valeurs sont-elles cohérentes avec votre réponse à la question précédente ? Que signifie le signe négatif de g_1^0 ?

Exercice 7 – Expérience d’une sphère en rotation en présence d’un champ magnétique

Un expérimentateur décide de s’attaquer à la modélisation de la dynamique du noyau terrestre.

Plutôt que de générer du mouvement à l’aide de différence de température (pas suffisamment efficace, au moins en laboratoire...), il décide de forcer le mouvement en faisant tourner une sphère extérieure à une vitesse de rotation Ω_1 autour d’une graine à l’arrêt, le fluide étant contenu entre les deux sphères : c’est un écoulement de *Couette sphérique* (figure 7).

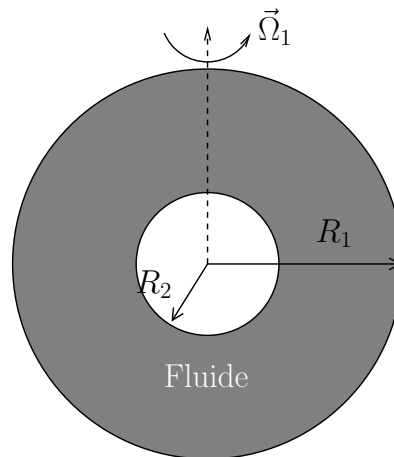


FIG. 7 – Écoulement de Couette sphérique avec une sphère en rotation autour d’une graine à l’arrêt, le fluide étant contenu entre les deux sphères.

Il fait le tour de son laboratoire et recense, à sa disposition :

- 140 litres de gallium,
- 20 litres de sodium,
- une graine de rayon $R_2 = 5$ cm,
- un moteur pouvant tourner jusqu’à $\Omega_1 = 2\,000$ tours/minute.

Quelques propriétés physiques des deux fluides sont données dans le tableau 3.

		GALLIUM	SODIUM
ρ	kg/m ³	6.09×10^3	0.93×10^3
ν	m ² /s	3.1×10^{-7}	7.75×10^{-7}
σ	(mΩ) ⁻¹	3.68×10^6	10.35×10^6

TAB. 3 – Propriétés physiques du gallium liquide et du sodium.

Il estime ensuite qu’entre une sphère en rotation à Ω_1 et une graine à l’arrêt, une bonne vitesse caractéristique de l’écoulement peut se calculer de la façon suivante :

$$U_0 = [(R_1 - R_2)/2] \Omega_1$$

a) Avec les volumes ci-dessus de gallium et sodium, l’expérimentateur se demande avec quel fluide il pourra atteindre le nombre de Reynolds magnétique maximum entre les deux sphères, la taille de la graine étant fixée à 5 centimètres.

On vous demande donc tout d’abord d’estimer la taille maximale de la sphère externe R_1 dans le cas de chaque fluide, à partir du volume de fluide disponible.

b) A partir de cette taille, on pourra construire l’échelle caractéristique de l’écoulement : $L_0 = R_1 - R_2$, cette grandeur intervenant dans le nombre de Reynolds magnétique Re_m .

Pour ensuite estimer le Re_m maximum, on prendra le cas extrême où la sphère externe est à la vitesse maximale ($\Omega_1 = 2000$ tours/min). Calculer Re_m dans le cas de l’expérience avec le gallium

et dans le cas de l'expérience avec le sodium.

Bien entendu, l'expérimentateur choisit pour faire son expérience le fluide qui lui permet d'atteindre le plus grand Reynolds magnétique. Quel est-il ?

Est-on alors dans un régime où on pourrait observer l'effet dynamo durant l'expérience ? Pourquoi ?

L'expérimentateur fait donc construire une sphère externe dont la taille est donnée par le volume disponible du fluide choisi. (Pour ceux qui n'ont pas trouvé le résultat on prendra $R_1 = 32$ centimètres et du gallium).

c) Dans un deuxième temps, l'expérimentateur se rappelle qu'il veut étudier une dynamo de type « terrestre », c'est à dire avec une forte influence de la rotation ou encore une forte influence de la force de Coriolis.

Il se rappelle aussi que pour être dans la limite asymptotique des faibles viscosités (régime du noyau où la viscosité joue un rôle essentiellement à travers les couches limites), il faut que le nombre d'Ekman $E = \frac{\nu}{\Omega L^2}$ soit inférieur à 10^{-8} .

A quelle vitesse Ω_1 doit donc tourner la sphère externe pour qu'on se trouve dans le régime asymptotique ? Donner le résultat en tours pas minute.

Quelle serait la nouvelle valeur du nombre de Reynolds magnétique dans cette expérience de Couette sphérique où la sphère externe est en rotation à Ω_1 et la graine à l'arrêt ?

Peut-on s'assurer que cette expérience serait bien une dynamo ? Peut on y répondre sans équivoque ?

d) Dans cet énoncé, on n'a pas encore parlé de champ magnétique imposé. En faudrait-il un pour que cette expérience soit une dynamo ? Quelle solution proposeriez pour vous rapprocher du noyau terrestre ?

Remarques :

- Dans tous vos calculs, en particulier pour la taille de la sphère que vous devez déterminer, arrondissez la taille au nombre entier le plus proche !
- Dans vos calculs, travaillez toujours en unités S.I. ! En particulier des tours/min doivent être convertis en rad/s ou encore des litres en m^3 .
- On rappelle que : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ S.I.