

Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

TD ④ Dynamique de l'atmosphère et approximation géostrophique

Rappel de Cours

Équation de Navier–Stokes dans un repère tournant

L'équation de Navier–Stokes s'écrit dans un référentiel galiléen

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla P + \mu \Delta \vec{u} + \vec{\mathcal{F}}_V.$$

Lorsqu'on réécrit la dérivée particulière $(D\vec{u})/(Dt)$ dans un repère en rotation à une vitesse $\vec{\omega}(t) = \omega(t) \vec{e}_z$, on obtient

$$\left(\frac{d\vec{u}_I}{dt} \right)_I = \left(\frac{d\vec{u}_R}{dt} \right)_R + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{u}_R + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (1)$$

où l'indice I signifie que l'on est dans le repère inertiel ou galiléen, et l'indice R signifie que l'on est dans le repère relatif en rotation.

On peut alors récrire l'équation de Navier–Stokes dans le repère en rotation

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla P + \mu \Delta \vec{u} + \vec{\mathcal{F}}_V + 2\rho \vec{u} \wedge \vec{\omega} - \rho \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} - \rho \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}$$

où \vec{u} est la vitesse relative dans le repère en rotation (écrite avec l'indice R dans l'équation (1)), $2\rho \vec{u} \wedge \vec{\omega}$ est la force de Coriolis, $\rho \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ est la force centrifuge et $-\rho \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}$ est la force de Poincaré.

Lorsqu'on est dans un repère en rotation uniforme $\omega = \text{constante}$, cela implique que la force de Poincaré est nulle. On démontre que l'équation de Navier–Stokes dans un repère en rotation uniforme à une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ s'écrit

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla P + \mu \Delta \vec{u} + \vec{\mathcal{F}}_V + 2\rho \vec{u} \wedge \vec{\omega} \quad (2)$$

où $P = P' - \rho\phi_C$ est la pression modifiée prenant en compte la force centrifuge, P' étant la pression dynamique et ϕ_C le potentiel associé à la force centrifuge. On a dans ce cas $\phi_C = \frac{\omega^2 r_\perp^2}{2}$ tel que $\nabla \phi = \omega^2 \vec{r}_\perp = -\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ avec r_\perp le rayon des coordonnées sphériques projeté sur un plan horizontal (voir Cours).

On peut alors écrire cette équation du mouvement dans le repère lié à rotation uniforme de la Terre à une vitesse $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. Décrire la dynamique de l'atmosphère revient à résoudre cette équation du mouvement afin d'obtenir le champ de vitesse \vec{u} dans le repère lié à la Terre.

L'approximation géostrophique

Dans le cadre de l'équilibre géostrophique, on écrit que l'équation (2) se réduit à un équilibre entre le gradient de pression et la force de Coriolis

$$2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla}P. \quad (3)$$

En écrivant cet équilibre stationnaire en temps, on suppose implicitement que la force de Coriolis domine tous les autres termes de l'équation de Navier–Stokes (sauf le gradient de pression).

Dans le cadre de la dynamique de l'atmosphère, on se placera souvent dans l'approximation de couche mince : on a une taille caractéristique horizontale bien supérieure à la taille caractéristique verticale. On voit directement dans l'équation (3) que seule la composante du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ perpendiculaire au sol va intervenir dans le calcul pour décrire les mouvements horizontaux des masses atmosphériques. Cette composante verticale du vecteur rotation s'écrit $\vec{\Omega}_\perp = \Omega \sin \varphi \vec{k}$ où φ est la latitude géographique et \vec{k} est le vecteur local perpendiculaire au sol. On se rend compte ainsi que la force de Coriolis va jouer un rôle important dans la dynamique de l'atmosphère surtout aux moyennes et hautes latitudes.

L'équilibre géostrophique (3) nous apprend aussi que la trajectoire du vent dans une instabilité (par exemple un cyclone ou un anticyclone) s'obtient directement à partir du champ de pression P : le fluide suit les isobares.

Loi des gaz parfaits

On utilisera dans certains exercices la modélisation simpliste d'une atmosphère isotherme en équilibre hydrostatique, soit

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT \Leftrightarrow P = \rho \frac{RT}{M} \text{ et } -\vec{\nabla}P \Big|_z \vec{e}_z = -\frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z = \rho \vec{g} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

où P est la pression en Pa, V le volume considéré en m^3 , n le nombre de moles, $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits, T la température en K, m la masse en g, M la masse molaire en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, ρ la masse volumique en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et z l'altitude en m.

On a alors la relation

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g = -\frac{PM}{RT}g \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{gM}{RT}dz \Leftrightarrow P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{gM}{RT}z\right) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right),$$

avec $P_0 = P(z=0)$, $H = \frac{RT}{gM}$ une hauteur caractéristique de la décroissance de la pression avec l'altitude.

Exercice 1 – Vent géostrophique

a) Rappeler l'équation de Navier–Stokes générale satisfaite par le champ de vitesse vectoriel \vec{u} lorsque celui-ci est écrit dans le référentiel de la Terre en rotation. On considérera que la norme du vecteur rotation de la terre $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ est constante au cours du temps. Identifier la force centrifuge et la force de Coriolis dans l'équation de Navier–Stokes. On suppose que la seule force agissant sur une parcelle fluide de l'atmosphère est son propre poids. Dans le cadre de l'approximation de couche mince atmosphérique, on suppose que la gravité $|\vec{g}|$ et la masse volumique ρ d'une parcelle de l'atmosphère sont constantes.

b) Démontrer que le poids agissant sur chaque parcelle fluide peut s'écrire sous la forme d'un gradient de potentiel, potentiel que l'on écrira ϕ_P . Introduire le potentiel ϕ_c associé à la force centrifuge. Récrire la champ de pression $P(\vec{x}, t) = [p + \rho\phi_P - \rho\phi_c](\vec{x}, t)$ et en déduire l'équation générale de Navier–Stokes utilisée pour la dynamique de l'atmosphère.

c) Quelles hypothèses doit-on faire pour écrire l'équation de l'équilibre géostrophique ? D'après le cours, où la force de Coriolis est-elle importante pour la dynamique de l'atmosphère terrestre ?

d) Considérer un repère local orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{k})$ et un point M à la surface terrestre où \vec{e}_x est dirigé vers l'est. Projeter l'équation de l'équilibre géostrophique selon les trois axes des coordonnées. On notera les trois composantes du vecteur vitesse $\vec{u} = (u, v, w)$. On notera φ la latitude géographique.

e) Rappeler pourquoi l'approximation de couche mince est justifiée dans le cas de l'atmosphère. Que cela implique-t-il pour w comparée à u et v ? Montrer que l'équilibre géostrophique se réduit alors à l'équation dite du *vent géostrophique* :

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho 2\Omega \sin \varphi} \vec{k} \wedge \text{grad } P \quad (4)$$

où \vec{k} est le vecteur unitaire dirigé selon la verticale locale, φ est la latitude, ρ est la masse volumique du fluide atmosphérique et P est le champ de pression. En déduire l'expression du champ de vitesse horizontal (u, v) en fonction du gradient de pression.

f) On observe sur une carte d'isobares à 3000 m d'altitude que l'écartement des isobares autour de la pression moyenne est de 5 hPa pour 200 km.

Calculer la vitesse du vent géostrophique $|\vec{u}|$ en utilisant la réponse à la question e). On donne $\rho = 1.29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\varphi = 45^\circ$.

g) Calculer la vitesse du vent géostrophique en modélisant cette fois l'atmosphère comme un gaz parfait compressible en équilibre hydrostatique (voir rappel de Cours). La différence avec la question f) est que l'on prend en compte ici la variation de la masse volumique avec la hauteur.

On donne $T(z = 3000 \text{ m}) = 265 \text{ K}$, $T(z = 0) = 273 \text{ K}$, $\rho_0 = \rho(z = 0) = 1.29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Exercice 2 – Carte de pression et vent géostrophique

Sur la figure 1 est reproduit une carte de pression météorologique où l'on distingue une dépression centrée sur les îles britanniques et un anticyclone sur les Açores. Les pressions sont exprimées en hecto-Pascal (10^2 Pascal).

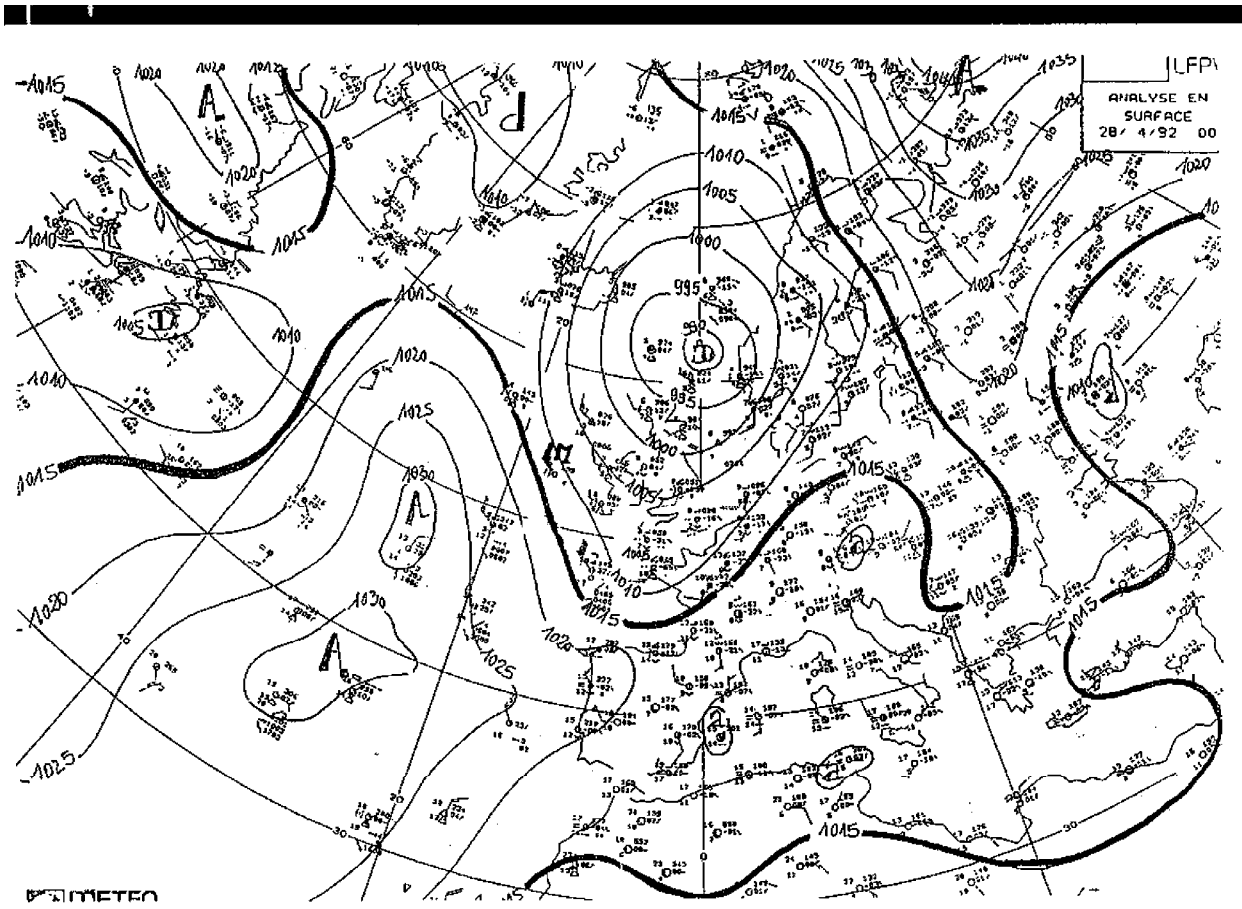


FIG. 1 – Carte de pression météorologique où une dépression est centrée sur les îles britanniques et un anticyclone est centré sur les Açores.

- a)** Dessiner la direction et calculer l'amplitude approximative de la force associée au gradient de pression s'appliquant sur une particule de fluide au point M initialement au repos. Le point M sur la figure 1 se situe sur l'isobare 1010 hPa. On donne Δd (centre de l'anticyclone – centre de la dépression) = 3200 km et P_{\min} (dépression) = 990 hPa et P_{\max} (anticyclone) = 1030 hPa.
- b)** A partir de la relation (4) du vent géostrophique, calculer la norme du vent \vec{u} au point M et donner son sens. On donne : $\rho = 1.25 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\varphi = 54^\circ \text{ N}$ la latitude au point M .
- c)** Dans quel sens les particules fluides tournent-elles autour des dépressions et anticyclones dans l'hémisphère Nord. Est-ce la même chose pour l'hémisphère Sud ?

Exercice 3 – Frottements dans la couche limite atmosphérique

On se place à moyenne latitude dans l'hémisphère Nord, à une altitude z modeste (de l'ordre de le centaine de mètres) autour d'une dépression. On suppose que l'on est en présence d'isobares circulaires, dont le rayon de courbure est suffisamment grand pour que le mouvement d'une particule dans l'atmosphère soit considéré comme rectiligne et uniforme sur un court trajet.

On constate que l'angle α entre la direction du vent et la direction d'une isobare est non-nul.

a) Quel devrait être l'angle α dans le cadre d'un mouvement d'une particule se déplaçant horizontalement et dont le mouvement est gouverné par l'équilibre géostrophique ?

b) Écrire l'équation de Navier–Stokes gouvernant le mouvement rectiligne et uniforme de la particule en mouvement dans la couche limite atmosphérique où les forces agissant sur la particule sont le poids et les forces de frottement $\vec{F}_{\text{frottement}}$ (Il n'est ni demandé de projeter Navier–Stokes ni demandé d'explicitier l'écriture de la force de frottement). En écrivant le poids sous la forme d'un gradient de potentiel comme dans l'exercice 1), montrer que l'on obtient une équation de Navier–Stokes comportant uniquement trois termes.

c) Montrer qualitativement à l'aide d'un schéma que les frottements à la base de la couche limite peuvent expliquer un angle α non nul entre la direction du vent et la direction des isobares.

Exercice 4 – Tornade atmosphérique

Une tornade se produit à une latitude $\varphi = 15^\circ \text{N}$. L'extension radiale de cette tornade est $r_0 = 1$ km. On observe que l'air y tourne à vitesse angulaire constante $\omega_0 = 0.1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

a) Dans un premier temps, on veut écrire l'équation de Navier–Stokes pertinente pour ce problème en faisant un certain nombre d'hypothèses. On suppose que

- le mouvement est stationnaire en temps,
- les vitesses radiales et verticales peuvent être négligées devant les vitesses azimutales,
- la tornade est à symétrie de révolution,
- les frottements visqueux sont négligés.

Montrer que l'équation de Navier–Stokes se réduit à $\frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \nabla_r P \Big|_r + \left(2\vec{u} \wedge \vec{\Omega} \right) \Big|_r$.

b) Calculer la vitesse du vent à la périphérie de la tornade, à 500 m, puis à 50 m de son centre.

c) Montrer que le terme de Coriolis peut être négligé en ce qui concerne la dynamique de la tornade.

d) Montrer que la pression à l'intérieur de la tornade à la distance r du centre est de la forme

$$P(r) = P_0 \exp \left[-\frac{\omega_0^2 M}{2RT} (r_0^2 - r^2) \right]$$

où P_0 est la pression à la périphérie de la tornade, M est la masse molaire de l'air, T est la température supposée constante. On modélisera l'atmosphère comme un gaz parfait pour répondre à cette question.

Calculer P au centre (œil de la tornade).

A.N. : $T = 298 \text{ K}$, $P_0 = 1000 \text{ hPa}$, $R = 8.31 \text{ J/K/mole}$, $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Exercice 5 – Ascendance - Subsidence

Des observations au voisinage du sol, à moyenne latitude Nord, montrent que la vitesse horizontale du vent est constante et égale à 14 m/s le long d'une isobare. L'angle entre la direction du vent et la direction de l'isobare est de 35 degrés en tout point de l'isobare. Le rayon de courbure de cette isobare est 20 km. On s'intéresse à une zone où les isobares décrivent des cercles et où la vitesse du vent varie très peu en rayon par rapport au centre de ces isobares.

On va dans cet exercice chercher à calculer la vitesse verticale du vent à 100 m d'altitude en considérant d'abord le cas d'une dépression puis le cas d'un anticyclone.

On supposera que la masse volumique de l'air est constante dans la couche de faible épaisseur et que la vitesse verticale est strictement nulle au niveau du sol.

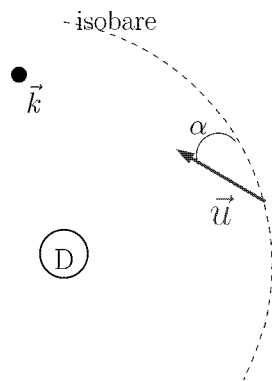


FIG. 2 – Schématisation du vent autour d'une dépression au voisinage du sol.

a) Sur la figure 2 est schématisée la vitesse du vent faisant un angle α avec la direction de l'isobare. On se retrouve dans le cas de l'exercice 3 avec une force de frottement qui pousse la fluide vers le cœur de la dépression.

En utilisant le principe de la conservation de la masse autour de cette dépression sur une épaisseur de 100 m, démontrez que l'on arrive à la relation suivante :

$$\frac{|\vec{u}_h| \sin \alpha}{r} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

où $|\vec{u}_h|$ est la norme de la composante horizontale du champ de vitesse schématisé sur la figure 2.

b) Dédurre de la question a) en intégrant la relation obtenue que l'on a ascendance de l'air au niveau des dépressions dans l'hémisphère Nord. Calculez cette vitesse pour $z = 100$ m.

c) Avec des arguments symétriques, démontrez que l'on a subsidence de l'air autour d'un anticyclone dans l'hémisphère Nord.

Exercice 6 – Vents et température sur la planète Mars

Le but de cet exercice est d'utiliser l'équation du vent géostrophique établi dans l'exercice 1) pour déterminer l'intensité des vents sur la planète Mars.

a) On suppose que le gaz atmosphérique martien peut être assimilé à un gaz parfait ($P = \rho R^* T$) où $R^* = R/M$. Retrouver la relation $P(z) = P_0 e^{(-gz/(R^*T))}$ entre la pression P , l'altitude z , la pression de surface P_0 et la température T dans le cas d'une atmosphère isotherme (température T constante selon z) en équilibre hydrostatique.

b) On veut estimer le vent dans la région de latitude (45N - 60N) de Mars. En supposant que l'atmosphère est en équilibre géostrophique, écrire à partir de l'équation (4) la relation entre les variations latitudinales (à altitude constante) de la pression et le vent zonal u (vent selon une latitude constante ou encore vent selon un parallèle géographique). On démontrera en particulier que $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = a \frac{\partial P}{\partial y}$ où a est le rayon de la planète Mars et où y pointe vers le pôle Nord géographique.

c) La figure 3 nous donne la distribution spatiale de la température sur Mars en fonction de

la latitude et de la pression (reliée à l'altitude, voir question a)). Il se trouve qu'entre les latitudes 45N - 60 N, le modèle utilisé en a) et b) pourrait s'appliquer :

- la température, au premier ordre, ne dépend pas de z .
- la force de Coriolis est importante dans cette région.

On suppose pour pouvoir continuer à mener le calcul analytiquement que la température dans cette région ne dépend que de la latitude φ et pas de l'altitude :

$$T(\varphi, z) = T(\varphi) = \alpha + \beta\varphi$$

avec, à 45N, $T(\pi/4) = 190$ K et, à 60N, $T(\pi/3) = 170$ K.

Déduire des deux questions précédentes la relation suivante entre le vent zonal et les variations latitudinales de la température,

$$u = -\frac{gz}{2a\Omega \sin \varphi T} \frac{\partial T}{\partial \varphi}.$$

On supposera que la pression de surface est indépendante de la latitude (donc que la vitesse zonale de surface est nulle).

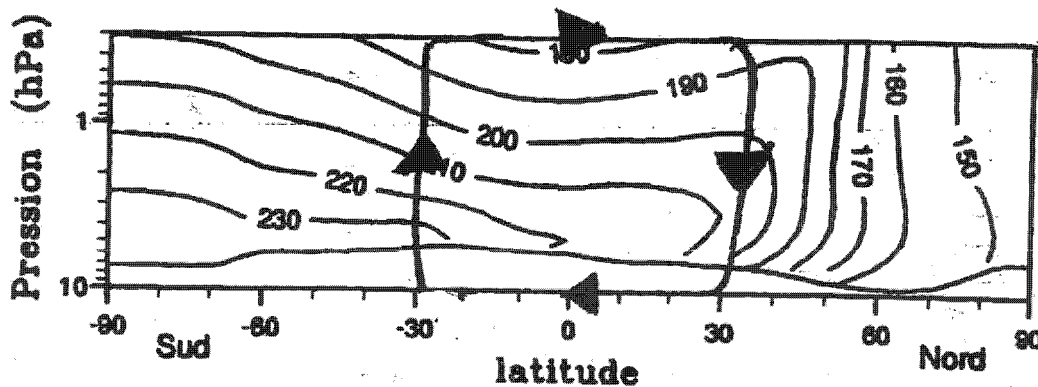


FIG. 3 – Moyenne zonale $\bar{T}(\varphi, z) = \int_{\theta=0}^{2\pi} T(\theta, \varphi, z)$ de la température sur Mars près du solstice d'hiver Nord avec en abscisse la latitude et en ordonnée le logarithme de la pression (les courbes sont des isothermes en K). θ est la longitude.

On donne quelques valeurs physiques de la planète Mars :

Rayon	a	3700 km
gravité moyenne	g	3.7 m s^{-2}
taux de rotation planétaire	Ω	7.10^{-5} s^{-1}

Quelle est la vitesse du vent zonal à 10 et 20 km d'altitude à 45N ? Quel est son sens ? En déduire que le vent zonal croît avec l'altitude.