

Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

TD ③bis – Stabilité linéaire d'un écoulement convectif 2D

Analyse de stabilité linéaire pour le seuil de la convection thermique dans une couche chauffée par le bas.

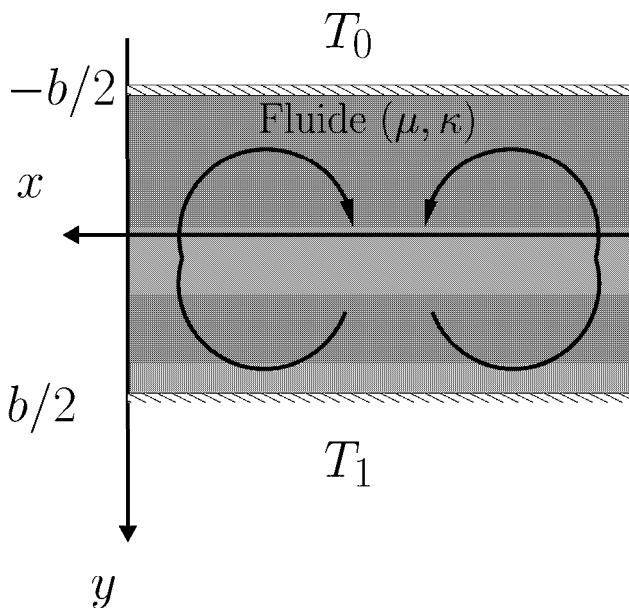
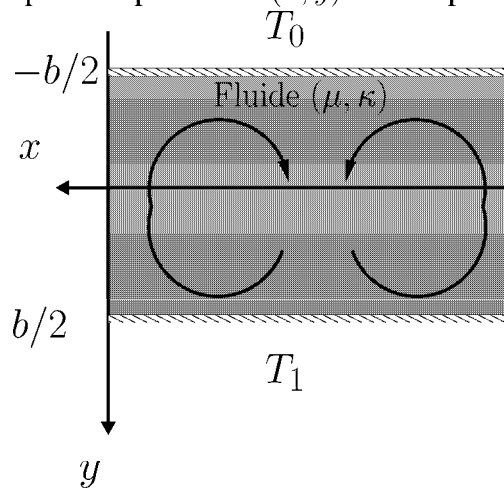


FIG. 1 – Cellule de convection bidimensionnelle avec une couche de fluide chauffée par le bas à une température constante T_1 , la température supérieure étant constante aussi à T_0 , telles que $T_1 > T_0$.

On considère une couche de fluide chauffée par le bas en $y = b/2$ à une température T_1 et refroidie par le haut en $y = -b/2$ à une température T_0 . On suppose qu'il n'y a pas de source de production de chaleur interne au sein du fluide ($A = 0$ dans l'équation générale de la chaleur). Les forces d'Archimède vont induire de la convection thermique au sein de la couche lorsqu'on aura excédé le nombre de Rayleigh critique : le fluide chaud près du bas de la couche remonte et inversement, le fluide froid, près du haut tend à descendre comme schématisé sur la figure 1.

On se propose de **calculer le nombre de Rayleigh critique pour lequel la convection démarre** : en effet, la convection ne démarre que lorsque les forces visqueuses qui s'opposent au mouvement deviennent plus petites que la poussée d'Archimède.

On suppose un écoulement bidimensionnel, avec des vitesses contenues dans le plan (Oxy) et un écoulement infini selon la direction z , si bien que l'on considère le champ de vitesse $\vec{u} = (u_x(x, y), u_y(x, y))$ et le champ de température $T(x, y)$ dans le problème.



Les équations générales qui régissent le problème que l'on veut étudier sont l'équation de Navier–Stokes et l'équation de la chaleur :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{u} + \vec{F}_v$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T \right) - \kappa \Delta T = \frac{A}{\rho C_p} = 0$$

L'équation de la chaleur se réécrit dans notre cas particulier bidimensionnel (il faut développer en particulier $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T$) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} - \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1)$$

En absence de convection, le fluide est au repos et l'équation de la chaleur (1) se simplifie en

$$\frac{dT_c^2}{dy^2} = 0$$

où $T_c(y)$ est le profil conductif solution. Le profil linéaire de température s'obtient en intégrant deux fois l'équation précédente et en utilisant les conditions limites $T_c(b/2) = T_1$ et $T_c(-b/2) = T_0$. On obtient

$$T_c(y) = \frac{T_1 + T_0}{2} + \frac{T_1 - T_0}{b} y,$$

un profil linéaire en y comme attendu dans le cas conductif.

Au seuil de convection, lorsque les premiers mouvements infinitésimaux apparaissent, on peut réécrire :

$$T' = T - T_c = T - \frac{T_1 + T_0}{2} - \frac{T_1 - T_0}{b} y$$

où T' , l'écart de température par rapport au profil conductif, demeure infiniment petit : la température ne s'écarte que très peu du profil conductif au seuil de convection.

De même, les vitesses u'_x et u'_y apparaissant au seuil de convection sont infiniment petites.

On réécrit l'équation de la chaleur (1) en remplaçant T par $T'(x, y) + T_c(y)$, équation de la chaleur valable pour le seuil de convection :

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u'_x \frac{\partial T'}{\partial x} + u'_y \frac{\partial T'}{\partial y} + u'_y \frac{(T_1 - T_0)}{b} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

Puisque les termes T' , u'_x , u'_y sont petits, les termes non-linéaires dans l'équation ci-dessus $u'_x \partial T' / \partial x$ et $u'_y \partial T' / \partial y$ sont très petits par rapport aux autres termes. L'équation (2) se réduit à l'ordre dominant à :

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u'_y \frac{(T_1 - T_0)}{b} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Enlever les termes non-linéaires est une pratique courante en mathématique lorsqu'on étudie la stabilité d'un système : on appelle cette approche **analyse de stabilité linéaire** (ou marginale), valide tant que les perturbations T' , u'_x , u'_y restent infiniment petites, ce qui est vrai dans notre cas puisqu'on est au seuil de convection.

On peut maintenant écrire les équations pour de petites perturbations en température T' , en vitesse u'_x , u'_y et en pression P' quand le fluide devient instable :

$$\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_y}{\partial y} = 0, \text{ conservation de la masse.} \quad (4)$$

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y^2} \right), \text{ Navier-Stokes selon } Ox. \quad (5)$$

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial y} - \rho_0 \alpha g T' + \mu \left(\frac{\partial^2 u'_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'_y}{\partial y^2} \right), \text{ Navier-Stokes selon } Oy. \quad (6)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u'_y \frac{(T_1 - T_0)}{b} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right), \text{ équation de la chaleur.} \quad (7)$$

À noter dans ce système :

- le gradient de pression hydrostatique disparaît de (6). Au départ en effet, avec l'équilibre hydrostatique durant l'état conductif, on a $-\vec{\nabla} P + \rho_0 \vec{g} = \vec{0}$. Au seuil de convection, on introduit $P = P_0 + P'$. On réécrit alors

$$-\vec{\nabla} (P_0 + P') + \rho_0 [1 - \alpha(T - T_c)] \vec{g} \Leftrightarrow -\vec{\nabla} P' - \rho_0 \alpha T' \vec{g}$$

- à cause de la petitesse de Re au seuil, le premier membre de Navier-Stokes ($\rho D \vec{u}' / Dt$) est négligé dans les premiers membres des équations (5) et (6).

Afin de compléter la mise en équation, on précise maintenant **les conditions aux limites** du problème :

- on suppose que les deux surfaces en haut et en bas sont isothermes et qu'il n'y a pas de vitesse verticale du fluide au niveau de ces surfaces, soit

$$T' = u'_y = 0 \text{ en } y = \pm \frac{b}{2}, \forall x. \quad (8)$$

- on suppose que les deux surfaces sont « libres », la vitesse u'_x peut y être différentes de 0. C'est la contrainte τ_{yx} qui s'exerce sur le fluide en $y = \pm b/2$ qui doit être nulle, soit :

$$\frac{\partial u'_x}{\partial y} + \frac{\partial u'_y}{\partial x} = 0 \text{ en } y = \pm \frac{b}{2}. \quad (9)$$

Nous avons le système (4–9) à résoudre.

Afin de simplifier la résolution des équations (4–7) couplées aux conditions limites (8–9), nous introduisons maintenant la notion de **fonction courant**. Dans le cas particulier des écoulements bidimensionnels, l'équation de la conservation de la masse

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

est automatiquement satisfaite si on introduit une fonction courant $\Psi(x, y)$ telle que

$$u_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ et } u_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (10)$$

En effet, dans ce cas, l'équation de la conservation de la masse se réduit à :

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0, \quad \forall \Psi.$$

L'avantage d'introduire cette fonction courant lorsque l'écoulement s'y prête est que l'on a une seule fonction à résoudre $\Psi(x, y)$ et non plus deux $u_x(x, y)$ et $u_y(x, y)$ pour déterminer le champ de vitesse complet. On résout alors Ψ partout dans l'espace, puis on utilise (10) pour retrouver les composantes u_x et u_y .

On utilise pour notre résolution la fonction courant Ψ telle que $u'_x = \partial \Psi' / \partial y$ et $u'_y = \partial \Psi' / \partial x$. L'équation (4) est automatiquement satisfaite et on réécrit les équations (5–7) de la manière suivante :

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^3 \Psi'}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Psi'}{\partial y^3} \right) \quad (11)$$

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial y} - \rho_0 \alpha g T' + \mu \left(\frac{\partial^3 \Psi'}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Psi'}{\partial y^2 \partial x} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{1}{b} (T_1 - T_0) \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right) \quad (13)$$

On peut maintenant s'affranchir de la pression P' ci-dessus en dérivant l'équation (11) par rapport à y et en la retranchant à la dérivée de l'équation (12) par rapport à x .

On obtient

$$0 = -\rho_0 \alpha g \frac{\partial T'}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^4 \Psi'}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi'}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \Psi'}{\partial y^4} \right) \quad (14)$$

Notre problème se résume maintenant à la résolution de deux équations (13) et (14) avec les conditions aux limites (8) et (9).

Les équations (14) et (13) étant linéaires, on utilise la méthode des variables séparés pour les résoudre. Les conditions aux limites (8) et (9) sont satisfaites si l'on cherche des solutions du type :

$$\Psi' = \Psi'_0 \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) e^{\alpha' t} \quad (15)$$

$$T' = T'_0 \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) e^{\alpha' t} \quad (16)$$

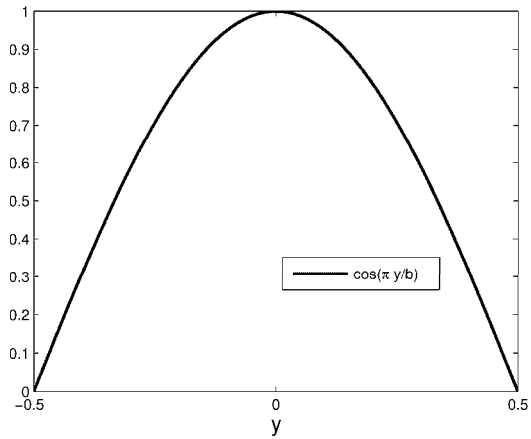


FIG. 2 – $\cos[(\pi y)/b]$ tracée pour $b=1$.

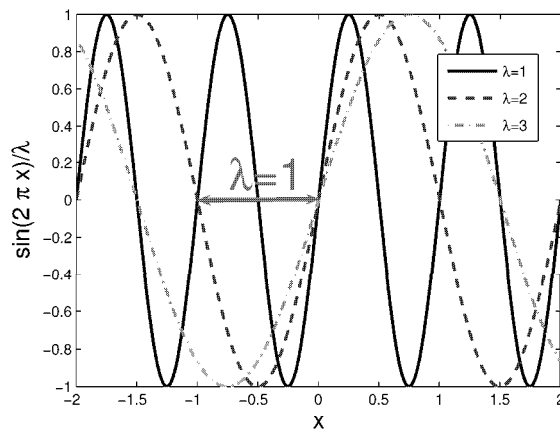


FIG. 3 – $\sin[(2\pi x)/\lambda]$ tracées pour $\lambda=1, 2$ et 3 .

En y , les conditions limites sont respectées par la fonction tracée sur la figure 2. Dans la direction horizontale x , les vitesses et température décrites par ces équations sont des perturbations dans la direction horizontale avec des longueurs d'onde λ comme schématisé sur la figure 3 : on a en effet $F(x) = \cos\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x\right] = F(x + n\lambda) = \cos\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(x + n\lambda)\right]$. Les amplitudes maximales des perturbations sont données par Ψ'_0 et T'_0 .

Des représentations de Ψ' et T' (en ne prenant pas en compte la dépendance temporelle et les amplitudes Ψ'_0 et T'_0) sont faites sur les figures 4 et 5 pour des perturbations de longueur d'onde $\lambda = 1$. On a également représenté les vecteurs vitesse \vec{u} sur la figure 5 déduit de la fonction courant Ψ en utilisant (10) : on constate bien que le champ de vitesse est déphasé par rapport au champ de température d'une demi-longueur d'onde. Le fluide monte pour des zones « chaudes » et descend pour des zones « froides ».

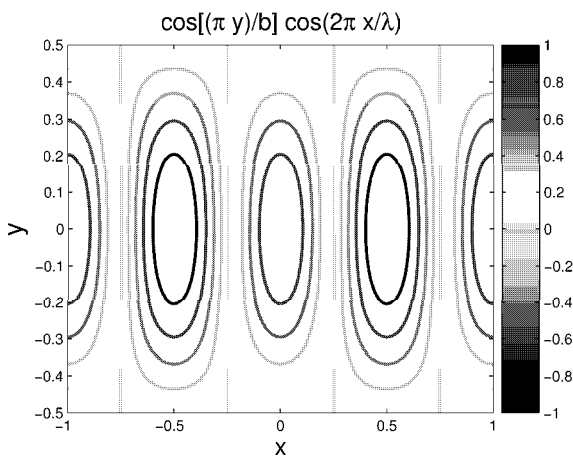


FIG. 4 – Contours des lignes d'égaux valeurs de la fonction $\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Champ de température pour $b = 1, \lambda = 1$.

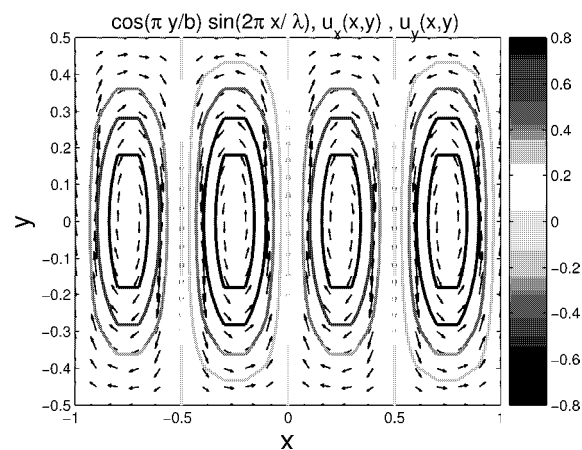


FIG. 5 – Contours des lignes d'égaux valeurs de la fonction courant $\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ et vecteurs vitesse obtenues en calculant explicitement $u_x = -\partial\Psi/\partial x$ et $u_y = \partial\Psi/\partial y$. $b = 1, \lambda = 1$.

Le signe de α' détermine si les perturbations vont croître dans le temps ou non . Pour $\alpha' > 0$, les perturbations vont croître et le système sera instable du point de vue de la convection, alors que pour $\alpha' < 0$, le système sera stable et la convection ne se développera pas.

On peut déterminer α' en utilisant les formulations (15) et (16) dans les équations (13) et (14). On obtient alors les deux équations suivantes :

$$\left(\alpha' + \frac{\kappa\pi^2}{b^2} + \frac{\kappa 4\pi^2}{\lambda^2}\right) T_0' = -\frac{(T_1 - T_0) 2\pi}{\lambda b} \Psi_0' \quad (17)$$

$$\mu \left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right)^2 \Psi_0' = -\frac{2\pi}{\lambda} \rho_0 g \alpha T_0' \quad (18)$$

On peut alors s'affranchir des amplitudes maximales Ψ_0' et T_0' en divisant ces deux équations entre elles. On peut alors isoler la valeur de α' :

$$\alpha' = \frac{\kappa}{b^2} \left[\left(\frac{\rho_0 g \alpha b^3 (T_1 - T_0)}{\mu \kappa} \right) \left(\frac{\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2}}{\left(\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} + \pi^2 \right)^2} \right) - \left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right) \right]. \quad (19)$$

On peut conclure déjà ici que le taux de croissance adimensionné $\alpha' b^2 / \kappa$ ne dépend que de deux quantités, $2\pi b / \lambda$, un nombre d'onde adimensionné ainsi que du nombre de Rayleigh qui apparaît sous sa forme connue :

$$Ra = \frac{\rho_0 g \alpha b^3 (T_1 - T_0)}{\mu \kappa}.$$

On réécrit alors l'équation (19) en terme de Rayleigh :

$$\frac{\alpha' b^2}{\kappa} = \frac{Ra \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} - \left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^3}{\left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^2} \quad (20)$$

Le dénominateur de (20) étant toujours positif, le taux de croissance α' est positif et il y a instabilité si

$$Ra > \frac{\left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^3}{\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2}}. \quad (21)$$

De même, le taux de croissance est négatif et l'écoulement est stable lorsque le nombre de Rayleigh Ra est inférieur au membre de droite de (6).

La convection se met en place lorsque précisément $\alpha' = 0$ ce qui se traduit par

$$Ra = Ra_c = \frac{\left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^3}{\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2}}. \quad (22)$$

Ce nombre de Rayleigh est le nombre de Rayleigh critique que nous recherchions : si $Ra < Ra_c$, les perturbations en température et en vitesse décroissent au cours du temps ; si $Ra > Ra_c$, les perturbations en température et en vitesse vont croître exponentiellement dans le temps.

Il est clair à travers l'expression (22) que Ra_c est une fonction de la longueur d'onde (ou du nombre d'onde) de la perturbation. La figure 6 illustre comment Ra_c dépend du nombre d'onde adimensionné $2\pi b / \lambda$: si Ra et le nombre d'onde de la perturbation sont tels que l'on se situe au

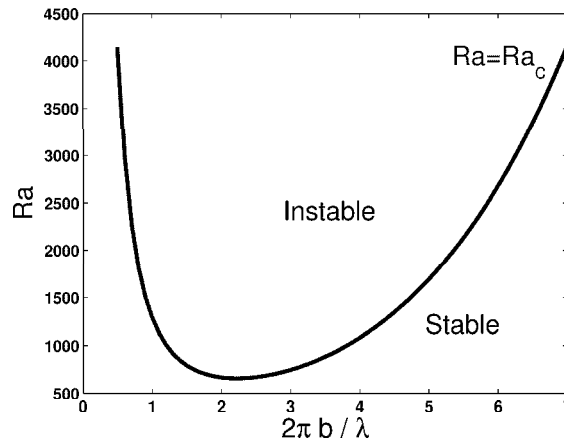


FIG. 6 – Nombre de Rayleigh critique Ra_c obtenue dans l'équation (22) dans le cas d'une couche de fluide chauffée par le bas, avec des conditions de surface libre. Ra_c représenté en fonction du nombre d'onde adimensionné $2\pi b/\lambda$.

dessus de la ligne Ra_c , la perturbation de longueur d'onde λ est instable. À un nombre de Rayleigh donné, il y a convection ou non selon la longueur d'onde de la perturbation. Il existe cependant une valeur minimum $\min(Ra_c)$ en dessous duquel le système ne peut pas convecter : si on se situe sous ce minimum, toutes les perturbations vont décroître dans le temps.

La valeur précise du nombre de Rayleigh minimum s'obtient en dérivant l'expression (22) par rapport à $2\pi b/\lambda$ et en cherchant la dérivée nulle, soit :

$$\frac{\partial Ra_c}{\partial \left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)} = \left[\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} 3 \left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^2 2 \left(\frac{2\pi b}{\lambda} \right) - \left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^3 2 \left(\frac{2\pi b}{\lambda} \right) \right] \left(\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right)^{-2} = 0 \quad (23)$$

On en déduit que $\frac{2\pi b}{\lambda} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ annule la dérivée dans (23).

La conclusion de ce calcul est que la longueur d'onde correspondant au plus petit nombre de Rayleigh critique est $\lambda = 2\sqrt{2}b$. Injectant cette valeur dans l'équation (22), on obtient la valeur minimum du nombre de Rayleigh critique, soit :

$$\min(Ra_c) = \frac{27\pi^4}{4} \simeq 657.5 \quad (24)$$

Une des interprétations physique de (24) est la suivante : si on prend un écoulement avec surface libre en haut et en bas, que l'on garde toutes les grandeurs physique du fluide constantes (μ, κ), et que l'on chauffe cet écoulement progressivement de $Ra = 0$ à $Ra > 0$ (lorsque $T_1 \neq T_0$), la convection apparaîtra précisément quand on atteint $Ra = 657.5$; la convection apparaîtra avec des cellules de convection dont le rapport d'aspect sera $\sqrt{2}$ comme schématisé sur la figure 7.