Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

TD ③ Dynamique du manteau

Exercice 1 – Validité d'un modèle de circulation dans le manteau supérieur ?

On suppose qu'une plaque lithosphérique rigide se déplace en surface avec une vitesse purement horizontal. Ce déplacement s'accompagne d'un mouvement de retour juste sous la lithosphère comme schématisé sur la figure 1. On fait l'hypothèse que la lithosphère est une plaque rigide de hauteur L se déplaçant avec une vitesse u_0. L'asthénosphère supposée incompressible (sous la lithosphère) a pour épaisseur h et pour viscosité dynamique μ. A la base de l'asthénosphère, on suppose que le manteau est au repos (vitesse nulle). Par souci de simplification, on ne prend pas en compte les forces d'origine thermique dans ce problème.

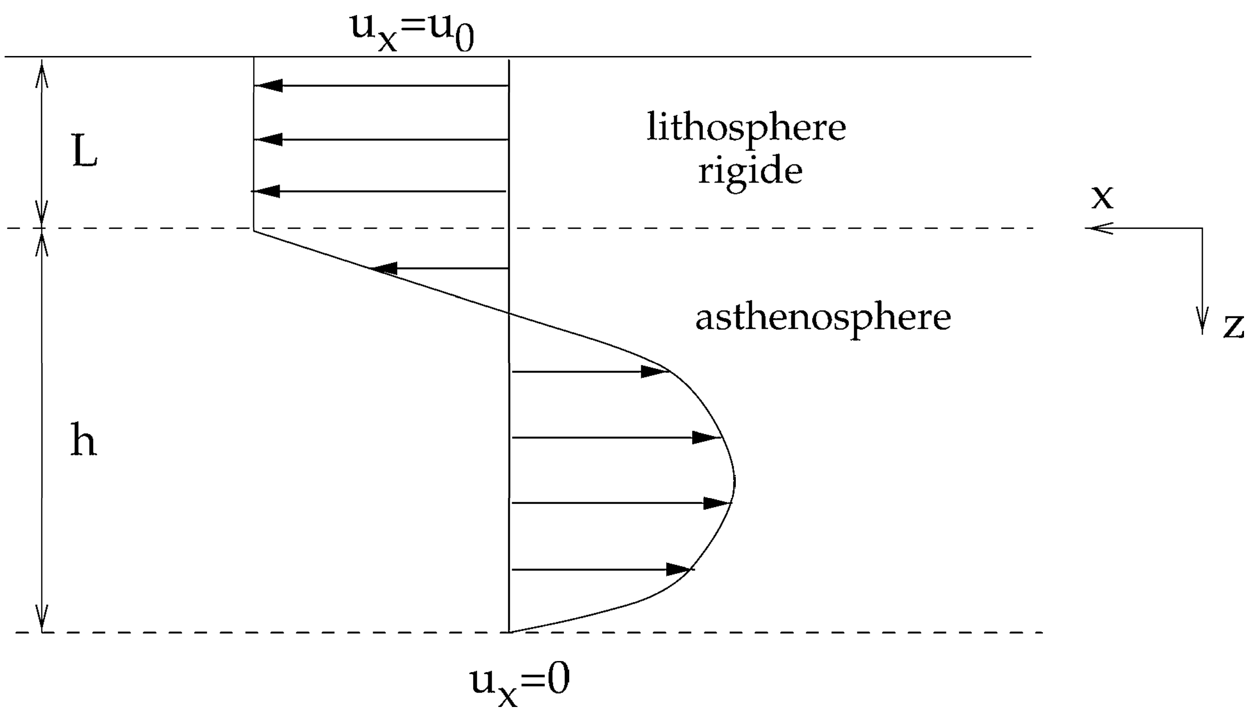

FIG. 1 – Illustration de l'écoulement lithosphérique.

a) Écrire l'équation de Navier–Stokes pour l'écoulement dans l'asthénosphère pour $O \leq z \leq h$ (on supposera comme toujours dans le manteau que $Re << 1$). En déduire l'expression de la vitesse en fonction de gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial x}$ (supposé constant) en utilisant les conditions aux limites en vitesse.

b) Écrire la condition de conservation de la masse dans l'écoulement considéré, en écrivant que dans le système (lithosphère + asthénosphère) la quantité de matière dans la direction $+x$ doit être équilibrée par une quantité équivalente dans la direction $-x$. On supposera que la densité lithosphérique égale la densité asthénosphérique. En déduire $\frac{\partial P}{\partial x}$ puis la vitesse en fonction de z. Remarquez que le profil de vitesse est indépendant de la viscosité asthénosphérique.

c) On fait l'hypothèse dans cette question que le gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial x}$ résulte d'une surpression en $x > 0$ et d'une dépression en $x = 0$: ce scénario pourrait prendre place si l'on a une dorsale médio-océanique « lente » en $x = 0$. Dans ce type de dorsale, les mesures bathymétriques indiquent en effet une vallée axiale profonde à l'aplomb de la dorsale. La pression croissante pour $x > 0$ serait due à une augmentation de la topographie $(d - h_e)$ quand on s'éloigne de la dorsale, d étant la profondeur de l'eau à la dorsale et h_e la profondeur de l'eau pour $x > 0$ comme schématisé sur la figure 2. On suppose $d - h_e << L$ où h (la géométrie de l'écoulement ne change pas).

Calculer la pression $P(x)$ pour $z = 0$; on supposera pour cela que la pression est la somme de la « colonne »d'eau et de la « colonne » lithosphérique. En déduire $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ en fonction de ρ_m, ρ_e, g et $h_e(x)$.

d) En déduire la variation de la topographie $\dfrac{dh_e(x)}{dx}$ en utilisant b) et c).
Qu'en concluez vous ?

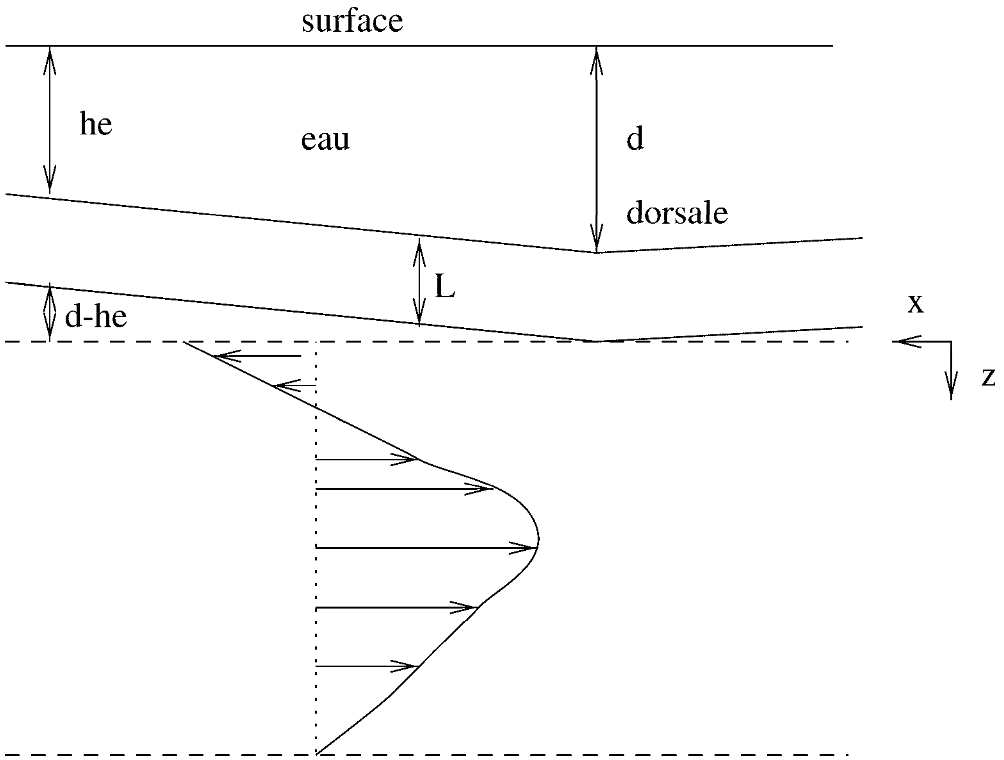

FIG. 2 – Schématisation d'une dorsale médio-océanique lente avec une vallée axiale.

e) Calculer la différence de hauteur $(d-h_e)$ entre la dorsale en $x = 0$ et une distance $x = 5000$ km pour les paramètres lithosphériques donnés ci-dessous.

A.N. : $\rho_m = 3300$ kg/m^3, $\rho_e = 1000$ kg/m^3, $L = 100$ km, $h = 200$ km, $\mu = 4.10^{19}$ Pa.s, $u_0 = 5$ cm/an et $g = 10$ m/s^2.

Exercice 2 – Thermiques et panaches dans le manteau

Considérons une sphère de rayon a et de densité ρ plongée au sein d'un fluide au repos et de densité uniforme ρ_0.

a) Dans la situation décrite ci-dessus, quelles forces subit la sphère ? Peuvent-elles mettre en mouvement la sphère ?

Le système étant invariant horizontalement, dans quelle direction le mouvement de la sphère s'effectuera-t-il ?

b) Donner l'expression de la poussée d'Archimède s'exerçant sur la sphère. (Attention aux unités : on doit trouver une expression homogène à celle de la force visqueuse donnée ci-après).

En supposant que le mouvement de la sphère résulte de l'équilibre entre la poussée d'Archimède et la force visqueuse ($F_\mu = 4\pi a \mu u$ avec u la vitesse verticale de la sphère, μ la viscosité de l'encaissant), determiner la vitesse de la sphère en fonction de a, ρ_0 et ρ, μ et g.

c) On se place maintenant dans le contexte du manteau terrestre. On se propose d'étudier la vitesse de remontée d'un panache (composé d'une tête et d'un conduit comme schématisés sur la figure 3). On ne considère pas dans cette question l'effet du conduit du panache.

Considérons le cas d'un panache thermique dont le déficit de densité est dû à une température plus élevée de ΔT par rapport au manteau environnant. Exprimez la densité du panache ρ en fonction de ΔT, de ρ_0 (la densité du manteau) et du coefficient de dilatation thermique α du manteau.

Calculez u avec, $\alpha = 3\ 10^{-5}$ K^{-1}, $\Delta T = 500$ K, $\rho_0 = 4000$ kg m^{-3}, $a = 300$ km, g = 10 m s^{-2}, μ = 10^{22} Pa s.

Que pensez-vous de cette valeur ?

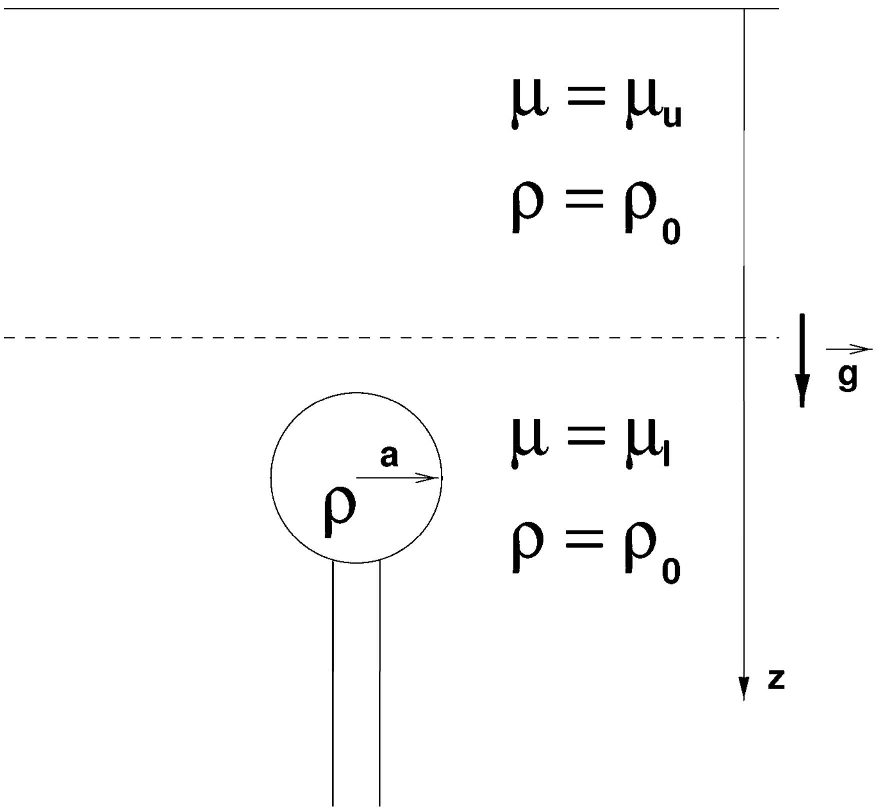

FIG. 3 – Tête de panache thermique et son conduit.

d) Donner l'expression du nombre de Reynolds associé au mouvement de la tête du panache thermique.

Quelle est sa valeur numérique ? En conclure que l'équation de départ qui gouverne le mouvement de la tête est justifiée.

e) On s'interesse maintenant au conduit du panache thermique. Sachant que le mouvement du fluide au sein du conduit est aussi contrôlé par l'équilibre entre la flottabilité et le frottement visqueux sur les bords du conduit ($F_\mu = 2\pi\mu_p u_p L$, avec μ_p la viscosité du fluide dans le panache, R le rayon du conduit, L sa longueur et u_p la vitesse dans le panache), déterminer la vitesse u_p en fonction de ρ et ρ_0, μ_p, R, g (A noter qu'on recherche ici une valeur « moyenne » intégrée de la vitesse, on ne cherche pas à résoudre l'écoulement même au sein du conduit).

Exprimer u_p en fonction du flux volumique Q dans le conduit.

f) On se place maintenant à un temps t_0 où les caractéristiques du panache sont les suivantes : $L = 200$ km et $R = 10$ km. Vérifier que le volume du conduit est négligeable devant celui de la tête.

En supposant un débit volumique Q constant entre les temps 0 et t_0, utiliser la conservation du volume pour obtenir le rayon de la tête en fonction du temps de montée. Pour cela, on supposera que le volume de la tête est initialement nul et que la vitesse de la montée de la tête u est constante. Dans un second temps, exprimer le flux Q en fonction du rayon de la tête et de la distance L depuis l'origine du panache.

g) On suppose que la tête du panache continue à monter à la vitesse u constante à travers le manteau inférieur. Considérons maintenant le cas du panache qui passe du manteau inférieur (viscosité μ_i) au manteau supérieur (viscosité μ_s). Nous rappelons qu'il y a un changement de phase des roches du manteau à cette interface et que la viscosité est plus faible dans le manteau supérieur que dans le manteau inférieur. Exprimer le rapport entre la vitesse u de la tête qui vient de passer dans le manteau supérieur et celle du conduit encore dans le manteau inférieur.

A.N. : μ_p/μ_i = 0.1, μ_s/μ_i = 1/30, épaisseur du manteau inférieur $L = 2200$ km, a=300 km.

Quelle interprétation avez-vous du résultat ?

Bibliographie

Bercovici, D. and Mahoney, J., 1994. Double flood basalts and plume head separation at the 660-kilometer discontinuity. Science, 266 : 1367-1369.

Exercice 3 – Écoulement d'un glacier

On considère l'écoulement permanent d'un glacier, un fluide que l'on considérera newtonien, visqueux, isotherme, incompressible. Le glacier se situe sur une montagne assimilée à un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On note ρ la densité du fluide et μ sa viscosité dynamique.

La surface libre du glacier est supposée à hauteur constante L et la pression P_0 est constante sur cette surface. On suppose que la vitesse du glacier est en tout point parallèle à (Ox) (voir figure 4). On considère un problème bidimensionnel selon (Ox) et (Oy) uniquement, en supposant que l'on n'a pas de variation selon (Oz).

a) En tenant de compte la stationnarité de l'écoulement écrire l'équation du mouvement et l'équation de continuité. Quelle propriété caractéristique de l'écoulement peut-on déduire de l'équation de continuité ? Quelle est la condition aux limites à écrire en $y = 0$ pour le champ de vitesse ? Quelle est l'allure qualitative du champ de vitesse du glacier (ne pas calculer le champ de vitesse) ?

En utilisant l'équation du mouvement projetée selon (Oy) ainsi qu'une condition limite, montrer que la répartition de pression selon y est indépendante de x.

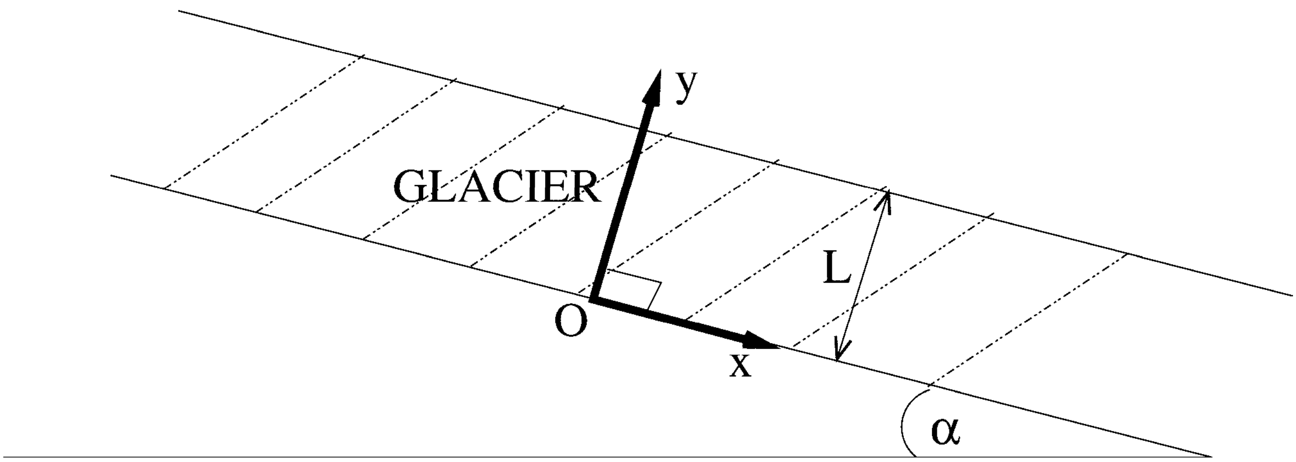

FIG. 4 – Dynamique d'un glacier.

b) Adimensionner l'équation de Navier–Stokes projetée selon (Ox), en utilisant L et U comme échelles caractéristiques de longueur et de vitesse.

c) Démontrer que l'équation de Navier–Stokes adimensionnée et projetée selon (Ox) se ramène à une équation du type

$$\beta + \frac{\partial^2 u_x^\star}{\partial^2 y^\star} = 0$$

où les grandeurs adimensionnées sont notées avec une étoile et β est une constante que l'on déterminera. Vérifier que β est sans dimension.

d) Quelle est la signification physique de ce paramètre β ?

On décide alors de réaliser en laboratoire une maquette au $1/1000$ du glacier que l'on désire étudier, avec une pente accentuée d'un facteur 15 tel que $(\sin(\alpha') = 15\sin(\alpha))$. On utilise comme fluide analogue de la glace de la glycérine dont la masse volumique est identique et la viscosité 10^6 fois plus faible que celle de la glace. On mesure une vitesse caractéristique d'écoulement de $3\ 10^{-6}$ m/s.

e) On utilise maintenant *le principe de similitude d'écoulement* (maquette et objet réel obéissent à la même équation dynamique) et on conclut que β doit être constant dans l'expérience et dans le glacier. Comment comprenez-vous cette conclusion ?

Quelle vitesse moyenne d'écoulement peut-on en déduire pour le glacier ?

f) Un objet est tombé dans une crevasse du glacier. Il est impossible d'aller récupérer celui-ci. On se demande alors au bout de combien de temps cet objet réapparaîtra-t-il au front du glacier, en supposant que l'objet est entraîné par le mouvement du glacier selon (Ox) et que le front du glacier correspond à la zone de fonte de glacier.

Pour répondre à cette question, on place un traceur dans la glycérine, à une position approximativement identique à la position correspondante de l'objet dans le glacier. L'expérience sur maquette nous donne un temps de réapparition de 24 heures. Qu'en déduisez-vous sur le temps de récupération de l'objet au front du glacier ?