Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

TD ② Équation générales de la mécanique des fluides

Rappels de Cours

Équation de la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(\rho\,\overrightarrow{u})$$

Si le fluide est incompressible, ρ est une constante, et :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{u}) = 0$$

Équation de la conservation de la quantité de mouvement
L'équation de Navier–Stokes s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{u}\right) = -\overrightarrow{\nabla}P + \mathrm{div}(\overline{\sigma'}) + \overrightarrow{\mathcal{F}}_V$$

ou

$$\rho\left(\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{u}\right) = -\overrightarrow{\nabla}P + \mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\mathrm{div}\,\overrightarrow{u} + \overrightarrow{\mathcal{F}}_V$$

où ζ est une viscosité de volume non considéré dans notre cours.
Dans le cas d'un fluide incompressible newtonien et à viscosité constante,

$$\mathrm{div}(\overline{\sigma'}) = \mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u}.$$

L'équation de Navier–Stokes par unité de volume se simplifie en :

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{u}\right) = -\overrightarrow{\nabla}P + \mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{\mathcal{F}}_V}$$

où $\overrightarrow{u}$ est le champ de vitesse du fluide, ρ est la densité du fluide, P est la pression dynamique du fluide, $\overrightarrow{g}$ est le champ de gravité, μ est la viscosité dynamique du fluide et $\overrightarrow{\mathcal{F}}_V$ sont les forces qui s'exercent sur le volume considéré (par exemple $\rho\overrightarrow{g}$).

Exercice 1 – Écoulement d'un fluide visqueux le long d'une pente

On étudie l'écoulement d'un fluide incompressible de viscosité dynamique μ et de masse volumique ρ sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On suppose que l'écoulement est stationnaire, unidirectionnel (selon Ox) et confiné sur une épaisseur h (voir figure 1. La pression à la surface libre est supposée égale à P_0.

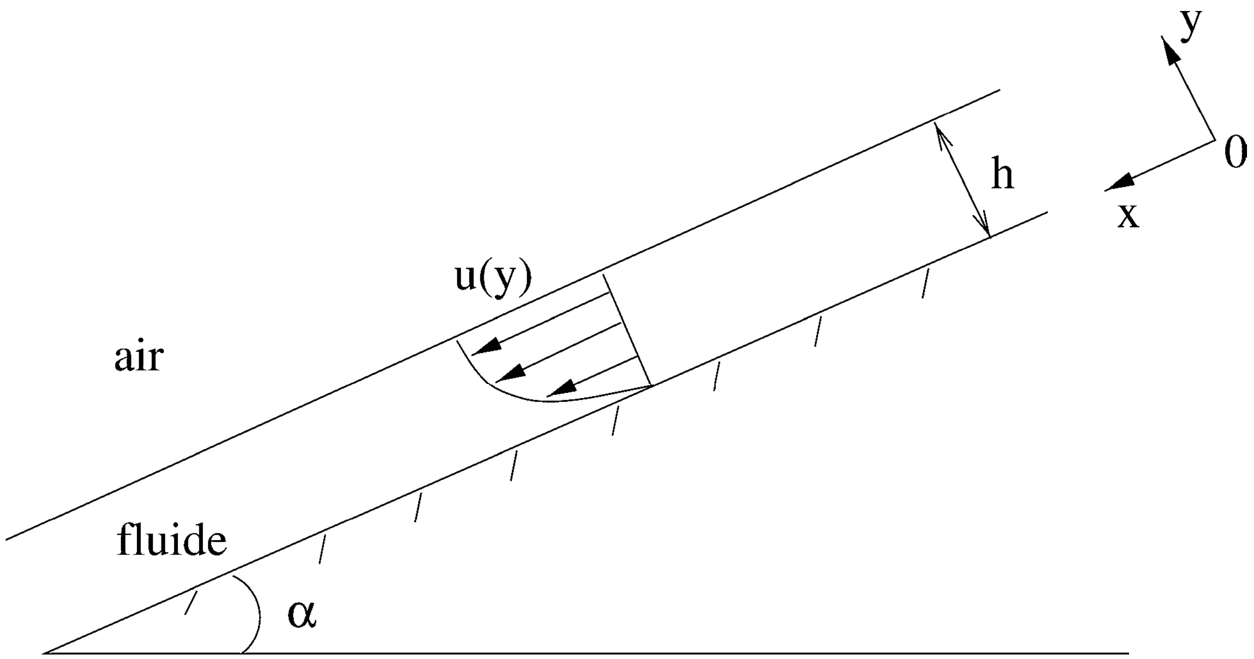

FIG. 1 – Coupe du plan incliné.

a) En utilisant l'équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible, montrer que l'écoulement ne dépend pas de x. On notera donc le champ de vitesse sous la forme $u(y)$.

b) En écrivant l'équation de la dynamique, montrer que la pression P est indépendante de x.

c) Au vu de la question précédente, donner l'équation différentielle vérifiée par $u(y)$ et régissant le mouvement du fluide suivant la direction (Ox).

d) Les conditions aux limites vérifiées par l'écoulement sont les suivantes :
- le fluide est immobile en $y = 0$.
- aucune contrainte ne s'exerce à la surface du fluide en $y = h$: ceci se traduit par

$$\frac{\partial u_{|y=h}}{\partial y} = 0.$$

En tenant compte de ces conditions aux limites, intégrer l'équation obtenue en 3) pour en déduire le champ de vitesse $u(y)$.

e) Calculer le débit de l'écoulement à une travers une surface de largeur unitaire ($z = 1$) dont la normale est suivant $\vec{e}_x$.

Exercice 2 – Écoulement dans un cylindre

On se propose ici d'étudier l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique de rayon R et longueur L (L≫R). Pour cela nous ferons les hypothèses suivantes, le fluide est incompressible, de viscosité cinématique ν et densité homogène ρ, l'écoulement est supposé laminaire (pas de terme non linéaire). Le mouvement du fluide dans la conduite est imposé par une différence de pression stationnaire appliquée à ses deux extrémités : $\Delta P = P_A - P_B$. Le gradient de pression est constant : $\dfrac{P_A - P_B}{L} = \dfrac{\partial P}{\partial x}$.

a) Quel est le système de coordonnées le plus approprié pour traiter le problème ?

b) Le système est-il invariant suivant certaines directions ? Qu'en déduisez vous sur les dérivées ? De quelles variables d'espace dépend alors le champ de vitesse ?

c) Écrire l'équation de conservation de la masse. En utilisant la condition aux limites en $r = R$, en déduire que $u_r = 0$.

d) Peut-on faire l'hypothèse d'un écoulement stationnaire en temps ?

e) La seule force extérieure étant suivant (Ox), il n'existe aucun forçage pouvant entretenir un mouvement du fluide suivant e_θ. Le fluide étant visqueux, toute composante initiale de vitesse u_θ sera dissipée au-delà d'un certain temps par frottement visqueux. Nous allons donc considérer $u_\theta = 0$. Écrire et projeter suivant les trois axes l'équation de Navier–Stokes.

f) En imposant que la vitesse doit rester bornée en tout point de l'espace, déterminer l'expression de la vitesse en fonction du rayon cylindrique en résolvant l'équation différentielle obtenue à la question 5).

g) Calculer le débit Q dans la section du tube.

On suppose maintenant qu'à l'amont de cette conduite se trouve un reservoir de rayon R_1 (avec $R \ll R_1$) rempli à une hauteur $h(t)$ telle qu'à tout temps ($R \ll h(t)$). On suppose que R_1 est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer, à chaque instant, l'écoulement dans la conduite comme un écoulement de Poiseuille circulaire permanent (*i.e.* celui que l'on vient de déterminer).

h) Déterminer ΔP en fonction de $h(t)$, en supposant le reservoir dans un régime hydrostatique (l'extérieur du système est à la pression P_0).

i) Donner une autre expression du débit et en déduire une équation différentielle en $h(t)$.

j) Déterminer h en fonction de t, g, ν, L, R, R_1 et h_0 (hauteur initiale).

Application numérique : en prenant $R = 1$ mm, $R_1 = 5$ cm, et $L = 50$ cm, sachant qu'il a fallu 4000 secondes pour que le niveau du reservoir baisse de $h_0 = 5\ 10^{-2}$ m à $h = 2.5\ 10^{-2}$ m, déterminer la viscosité cinématique ν du fluide et la comparer à celle de l'eau.

Exercice 3 – Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds Re est défini comme le rapport des termes inertiels sur les termes visqueux.

a) Dans le cas de l'océan ou l'atmosphère, Re est-il très petit ($Re \ll 1$) ou très grand ($Re \gg 1$) ? Vous justifierez brièvement votre réponse.

b) Même question en ce qui concerne le manteau terrestre.

On se propose maintenant d'estimer les valeurs de Re pour les milieux précédemment cités.

On rappelle l'équation de Navier–Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{u} \right) = \rho \overrightarrow{g} - \overrightarrow{\nabla} P + \mu \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{u}$$

On note L et U_0 respectivement une longueur et une vitesse caractéristiques de l'écoulement.

c) Construire un temps caractéristique t_0.

d) Donner l'ordre de grandeur de $\rho \dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t}$ et $\mu \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{u}$ en fonction de ρ, μ, L, U_0 et t_0.

e) En déduire que $Re = \dfrac{\rho U_0 L}{\mu} = \dfrac{U_0 L}{\nu}$.

f) Calculer Re pour :
- le manteau terrestre : $L \simeq 2900$ km, $U_0 \simeq 1$ cm/an, $\rho \simeq 5000$ kg/m^3 et $\mu \simeq 10^{21}$ Pa.s,
- l'atmosphère : $L \simeq 20000$ km, $U_0 \simeq 450$ m/s, $\nu \simeq 1.4\,10^{-5}$ m^2/s (on rappelle que $\nu = \mu/\rho$),

et comparer avec vos prédictions de la question 1).