Master 1 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 408, Champs et Fluides Géophysiques, 2006/2007

TD ① Statique des fluides

Exercice 1 – Stabilité statique de l'atmosphère sèche

On considère une parcelle de fluide de masse m à la pression P_0 et à la température T_0 que l'on amène rapidement à la pression P et à la température T. Cette opération est supposée suffisamment rapide pour que la particule fluide n'ait pas le temps d'échanger de chaleur avec l'atmosphère ambiante et on peut donc la considérer comme **adiabatique** (ou isentropique). Dans la question a) on réalisera que la valeur d'une grandeur physique, *la température potentielle*, reste inchangée pendant cette opération. Dans b) on calculera explicitement la variation de température de la parcelle pendant cette opération en supposant qu'on se trouve dans un milieu à l'équilibre hydrostatique : la variation de température suit le *gradient adiabatique*. Dans c) et d) on appliquera nos calculs au cas de l'atmosphère et on discutera en particulier de la dynamique d'une telle parcelle qui suit un déplacement isentropique. On supposera dans cet exercice que la parcelle de fluide est un **gaz parfait**.

a) On rappelle que l'entropie d'un gaz parfait en fonction à la température T et à la pression P s'écrit comme suit :

$$s = \frac{C_p}{m} \ln T - \frac{R}{m} \ln P + K$$

où K est une constante. On introduit les paramètres $\gamma = R^*/C_P^*$, où $C_P^* = C_P/m$ est la chaleur massique à pression constante et $R^* = R/m$, où $R = 8.314$ J.K^{-1}.mol^{-1} est la constante des gaz parfaits. Montrer que la température potentielle définie comme :

$$\theta = T \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\gamma} \qquad (1)$$

reste égale à la température T_0 si on déplace une parcelle de fluide d'un gaz parfait de (P_0, T_0) à (P, T) adiabatiquement.

b) La température potentielle de la parcelle est inchangée mais la température quant à elle varie. En partant de l'équilibre hydrostatique du milieu dans lequel se trouve la parcelle, utiliser l'expression de T obtenue en a) afin de démontrer que le gradient adiabatique Γ que suit la particule prend la forme :

$$\Gamma = \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{g}{C_P^*} \qquad (2)$$

où z est l'altitude et $g = 9.81$ m.s^{-2} l'accélération de la pesanteur.
Dans ce calcul, on utilisera et on démontrera que pour une mole d'un gaz parfait :

$$P = \rho R^* T$$

où ρ est la masse volumique de fluide.

c) L'atmosphère présente un gradient vertical de température constant et égal à Γ_A différent du gradient adiabatique Γ. Sachant que la particule fluide est entourée d'une atmosphère ambiante à la température T_A, montrer que l'équation du mouvement vertical de la parcelle de fluide s'écrit :

$$\ddot{z} = \frac{(\Gamma - \Gamma_A)}{T_A}\, z\, g \qquad (3)$$

d) Discuter alors la stabilité de l'atmosphère. Montrer en particulier qu'il existe un régime d'oscillation à une période T_{osc} que l'on précisera.

Exercice 2 – Stratification verticale de l'océan

a) Écrire l'équation du mouvement vertical pour une parcelle d'eau de mer de densité ρ déplacée de sa position dans un environnement de densité ambiante ρ_A.

b) On assimile le fluide océanique à un fluide incompressible, ce qui signifie que la densité de l'eau de mer (ainsi que sa température) ne varie pas avec la pression. Dans ce cas, la densité du fluide océanique peut s'écrire :

$$\rho_A = \rho_0 + \alpha T + \beta S \qquad (4)$$

où S est la salinité (masse de sel/masse d'eau), et α et β deux paramètres.
En vous basant sur votre sens physique, donner le signe des paramètres α et β.

c) A l'aide de la question **a)**, exprimer l'accélération de la parcelle en fonction de sa position z et du gradient ambiant de densité $\frac{\partial \rho_A}{\partial z}$.

d) En utilisant l'équation (4), trouver les conditions de stabilité de l'océan.

Exercice 3 – Manipulation d'Opérateurs mathématiques

Soit un champ scalaire $A(x,y,z) = 3x - z^2$ et un champ vectoriel $\overrightarrow{u} = (7y - 4x^2)\overrightarrow{e}_x - (3z^2 + 4y + 5x)\overrightarrow{e}_y - (8z^3 - 6y^2)\overrightarrow{e}_z$.

Soit un champ scalaire $A(r,\theta,z) = r\sin^2\theta$ en coordonnées cylindriques et un champ vectoriel $\overrightarrow{u}(r,\theta,z) = (r\cos\theta)\overrightarrow{e}_r + (z^2)\overrightarrow{e_\theta}$ également en en coordonnées cylindriques.

1) Calculer $\nabla A = \overrightarrow{\text{grad}} A$, $\nabla \cdot \overrightarrow{u} = \text{div}\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\nabla}^2 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u}$
2) Vérifier la formule de la divergence du produit d'un scalaire A par un vecteur $\overrightarrow{u}$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot (A\overrightarrow{u}) = A\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} A$$

3) Vérifier que Div laplacien = laplacien div, soit :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u}) = \Delta(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u})$$

4) Calculer $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{u})$.