Champs et Fluides Géophysiques

Unité d'enseignement TUE408 (6ECTS)

Master1

« Sciences de La Terre, de l'Univers et de l'Environnement » « Physique »

Daniel BRITO

04 76 82 80 42

Daniel.Brito@ujf-grenoble.fr

Septembre - Décembre 2006.

Cours et TD en ligne

http://www-lgit.obs.ujf-grenoble.fr/~dbrito/TUE408.html

PROGRAMME

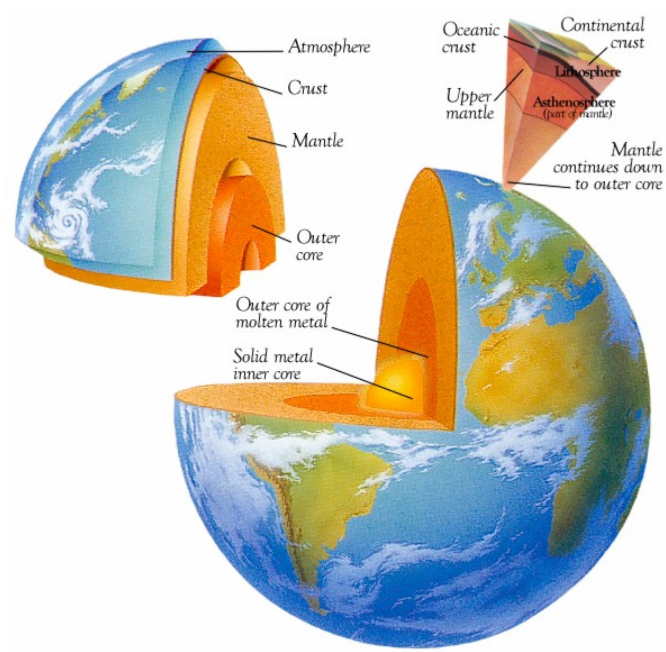
1. Mécanique des Fluides Géophysiques.
2. Géomagnétisme et Paléomagnétisme.

Mécanique des Fluides Géophysiques

1. **Statique des Fluides.**
2. **Équations générales de la mécanique des fluides.**
3. **Convection thermique dans le manteau.**
4. **Équations du mouvement dans un référentiel tournant**
5. **Dynamique de l’atmosphère.**

Géomagnétisme et Paléomagnétisme.

1. **Champ magnétique présent.**
2. **Propriétés magnétiques des matériaux.**
3. **Champ magnétique historique et paléomagnétisme.**
4. **Dynamique du noyau et sa modélisation.**



INTRODUCTION

- Fluide.
- Mécanique des fluides Géophysiques.

Mécanique des milieux continus,jean coirier,dunod.

1.Statique des Fluides.

Hydrodynamique physique, Guyon, Hulin & Petit.
CNRS Editions.

Quelques définitions

•**Solide**: les atomes restent fixes les uns par rapport aux autres, à l'exception de vibration de faibles amplitudes, d'origine thermique. Forte cohésion du milieu.

•**Gaz**: ensemble dilué de particules avec de faibles actions entre elles, sauf lors des collisions.

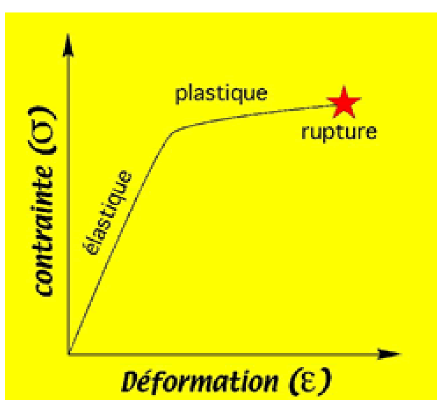
•**Liquide**: intermédiaire entre ces deux états. Liquide: gaz très dense (?) ou solide désordonnée (?).

•**exemple**: Le manteau terrestre

-courtes échelles de temps (0 a quelques milliers d'années): ***solide élastique.***

- échelles de temps géologiques: ***fluide très visqueux.***

•**exemple**: 2) Amplitude des déformations, déformations plastiques. Sous fortes contraintes, les déformations peuvent être irréversibles et on assiste à un écoulement du solide au dessus d'un seuil de contrainte appelé **limite élastique**. Ex: sac platique



•Dans notre cours, on suppose que le liquide est constitué d'une somme de sous éléments, appelés particules fluides ou éléments fluides. C'est un VOLUME INFINITESIMAL:

- suffisamment petit pour que le fluide y ait des propriétés uniformes.

- suffisamment grand pour que le nombre d'atomes ou de molécules soit grand et que des quantité thermodynamiques comme la température soit définie.

Mécanique des milieux continus.

•Pour décrire le mouvement d'un fluide, on considère le mouvement moyen de la matière en éliminant ainsi le déplacement propre de ses constituants: on regarde à l'échelle L, très grande devant celle du mouvement des atomes λ (libre parcours moyen), soit $L/\lambda >> 1$, caractéristique de la mécanique des fluides (à opposé à a théorie cinétique des gaz où $L/\lambda << 1$.

•Statique des fluides

champ de vitesse vectoriel $\vec{U}=\vec{0}$

•Bilan des forces sur une particule fluide au repos (démonstration sur un volume infinitésimal)

$$\vec{F}=-\vec{grad}\,P=-\vec{\nabla}P$$

•En présence d'un champ de gravité:

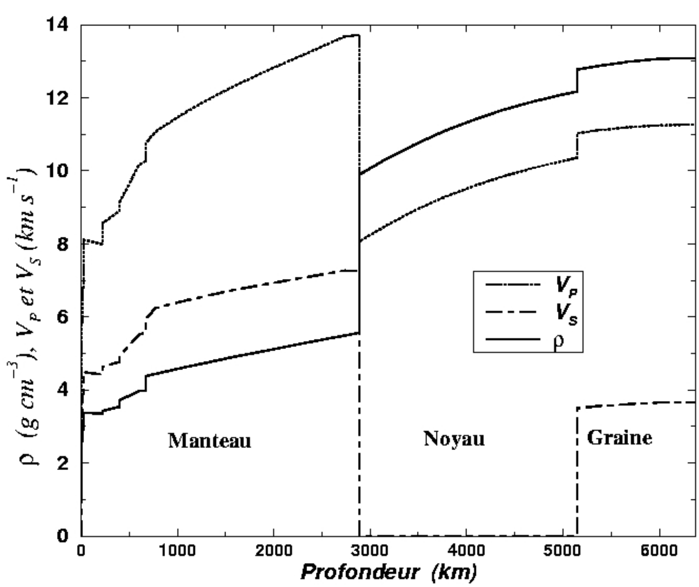
$$-\vec{grad}\,P+\rho\,\vec{g}=\vec{0}$$

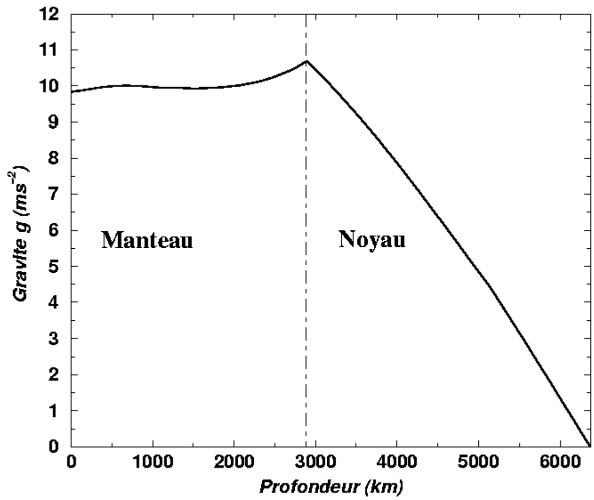
• Dans le cas des planètes, on peut écrire en première approximation qu'elles sont en pression hydrostatique en fonction de la profondeur (ne dépend que de r).

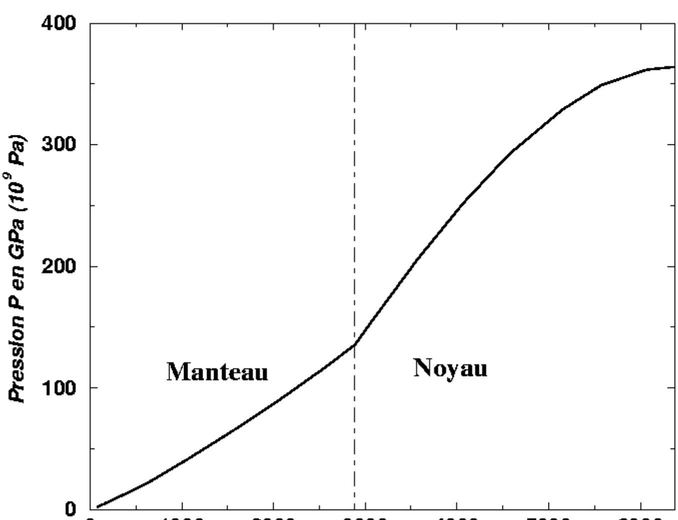
Geodynamics, Turcotte & Schubert.

•Calcul analytique avec g(r) et ρ constant

•Intégration numérique PREM.




Gravite g (ms^{-2})
Manteau
Noyau
Profondeur (km)


Pression P en GPa (10^9 Pa)
Manteau
Noyau
Profondeur (km)

•Poussée d'Archimède

$$\vec{F}_s = \int \rho_s \ \vec{g} dV + \vec{F}_{fluide} = \int_V (\rho_s - \rho_f) \vec{g} dV$$

•Application:

Équilibre hydrostatique de l' ***Atmosphère,***

Atmosphère assimilée à un gaz parfait.

2.Équations générales de la Mécanique des Fluides

Objectif du cours

Écrire le principe fondamental de la dynamique

$$\sum \overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{\Gamma} = m\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}$$

à un fluide en mouvement pour démontrer l'équation de Navier-Stokes (newtonien, incompressible)

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right) = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\vec{\Delta}\vec{u} + \vec{\mathcal{F}}_V$$

DESCRIPTION DU MOUVEMENT

Comment décrire le mouvement des particules?

- **Approche Lagrangienne**

Grandeurs physiques attachées à une particule: décrites le long de la trajectoire des particules. Utiles dans des cas particuliers.

- **Approche Eulérienne**

Champs scalaires ou vectoriels dans un repère fixe.

Exemple: champ de vitesse U en fonction des coordonnées géographiques (r,θ,ϕ).

Dérivée particulaire d'un scalaire

Soit une grandeur scalaire T, décrite par un champ T(x,y,z,t), et un champ de vitesse $\vec{u}(x, y, z, t)$, quelle est la variation de T le long du trajet d'une particule ?

$$DT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

Le long du trajet d'une particule on a $dx = u_x\, dt$, $dy = u_y\, dt$ et $dz = u_z\, dt$. D'où:

$$DT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} u_x\, dt + \frac{\partial T}{\partial y} u_y\, dt + \frac{\partial T}{\partial z} u_z\, dt$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T$$

Dérivée particulaire d'un vecteur

On peut appliquer le shéma de differentiation ci-dessus à chacune des composantes (a_x, a_y, a_z) d'un champ vecteur $\vec{A}(x, y, z, t)$. Cela donne:

$$\begin{aligned}
\frac{Da_x}{Dt} &= \frac{\partial a_x}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} a_x \\
\frac{Da_y}{Dt} &= \frac{\partial a_y}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} a_y \\
\frac{Da_z}{Dt} &= \frac{\partial a_z}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} a_z
\end{aligned}$$

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{A}$$

Exemple : champ de vitesse $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{u}$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \overrightarrow{grad}\right) \vec{u}$$

s'écrit pour $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{u}$ selon 3 équations :

selon $(\mathrm{O}x)$ $\displaystyle \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$

selon $(\mathrm{O}y)$ $\displaystyle \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}$

selon $(\mathrm{O}z)$ $\displaystyle \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$

Conservation de la masse, 1) Approche locale

La conservation de la quantité de matière revient à écrire que le changement de masse d'un volume élémentaire dx.dy.dz pendant un temps dt est égal à la quantité de matière entrante moins la quantité de matière sortante dans ce volume pendant un temps dt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho\, \vec{u})$$

Conservation de la masse, 2) Approche intégrale

Soit un volume V quelconque fixe (i.e., traversé le par fluide), on note $\overrightarrow{dS}$ le vecteur normal à l'élément de surface de norme dS

La quantité de fluide qui traverse cet élément de surface pendant un temps dt est

$$\rho\vec{u} \cdot \overrightarrow{dS}\ dt$$

Cela se traduit par un changement de masse du volume:

$$-d\int_V \rho dV = -\int_V d\rho dV$$

$$\oint_S \rho\vec{u} \cdot \overrightarrow{dS} = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV$$

CONSERVATION DE LA MASSE – Équation I

- **approche locale eulérienne**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho\,\vec{u})$$

- **approche intégrale eulérienne**

$$\oint_S \rho\vec{u} \cdot \overrightarrow{dS} = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV$$

Fluide incompressible: $\mathrm{div}(\vec{u}) = 0$

CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT – Équation II

La variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces qui s'appliquent dessus.

En statique: $-\overrightarrow{\nabla} P + \rho \overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$ (cf cours 1)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho \, g$$

soit $P_{\text{hydr}} = \int \rho(z) g(z) dz$

CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT – Équation II

Lorsque le fluide est en mouvement, la pression est différente de la pression hydrostatique, la difference $P - P_{\text{hydr}}$ est appelée pression dynamique. $P' = P - P_{\text{hydr}}$.

Si la densité n'est pas stratifiée, on peut poser:

$$\rho(x, y, z) = \rho_0(z) + \Delta\rho(x, y, z)$$

et définir la pression hydrostatique comme:

$$P_{\text{hydr}} = \int \rho_0(z) \, g(z) \, dz$$

CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT – Équation II

Le bilan des forces de pression et de gravité peut alors se simplifier en:

$$-\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} =$$

$$-\vec{\nabla}(P' + P_{\mathrm{hydr}}) + (\rho_0 + \Delta\rho)\vec{g} =$$

$$-\vec{\nabla}P' + \Delta\rho\vec{g}$$

EQUATION DE LA CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT – Eq II

POUR UN FLUIDE PARFAIT (viscosité nulle) où la gravité est la seule force en volume:

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right) = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g}$$

Comme pour tout champ il faut des conditions limites en bord de volume.

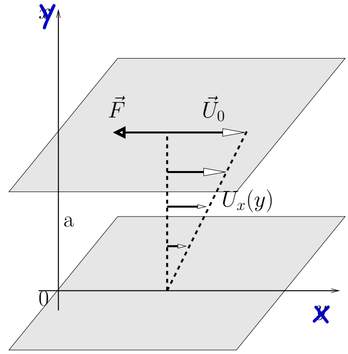
$$\vec{u}_{\mathrm{solide}}\cdot\vec{n} = \vec{u}_{\mathrm{fluide}}\cdot\vec{n}$$

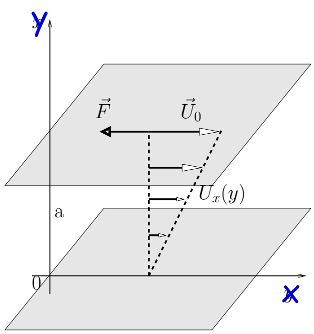
(vitesse tangentielle solide/liquide permise)

Pour un fluide réel (pas un fluide parfait), des contraintes surfaciques vont s'exercer entre les « couches » de fluide.

Définition macroscopique de la viscosité

Considérons l'écoulement stationnaire d'un fluide situé entre deux plaques infinies, parallèles entre elles et distantes de a dans la direction perpendiculaire y. Une plaque est maintenue fixe et l'autre se déplace à une vitesse constante u_0.





Le fluide est entraîné par le mouvement.

En régime stationnaire (après la fin d'un transitoire), la vitesse du fluide varie linéairement de 0 à u_0 d'une plaque à l'autre.

Expérience de Couette plan

$$u_x = u_0 \frac{y}{a}$$

$$\frac{F_x}{S} = \frac{\mu \, uo}{L} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

La force de friction Fx s'oppose au mouvement relatif des plaques. Le rapport Fx/S est appelé contrainte de cisaillement (dimension d'une pression).

μ est la viscosité dynamique (car associée à une force)

•La viscosité dynamique:

Expérience de Couette plan

$$u_x = u_o \frac{y}{a}$$

$$\frac{F_x}{S} = \frac{\mu \; uo}{L} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Ce type de comportement va s'appliquer au fluide en mouvement. Des contraintes vont s'appliquer sur les volumes de fluide→forces de surface à reconsidérer par rapport au cas statique.

Pour réintroduire ces termes de surface qui s'appliquent sur une particule en mouvement :

1. **Description du tenseur des taux de déformation**
2. **Description du tenseur des contraintes**

Hydrodynamique physique, cnrs editions, Guyon, Hulin & Petit

1) Tenseur des déformations

Analysons la déformation d'une particule fluide (nécessaire pour ensuite faire le lien avec le tenseur des contraintes).

Soit à un instant t, une particule située en un point $\overrightarrow{r}$ et dont la vitesse est $\overrightarrow{u}(\vec{r}, t)$. Celle d'une particule voisine au point $\overrightarrow{r} + \overrightarrow{dr}$ est $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{du}$

On peut écrire l'acroissement de vitesse :

$$du_i = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dx_j$$

$$\rightarrow G_{ij} = (\partial u_i)/(\partial x_j)$$

tenseur du taux de déformation

(gradients de vitesse)

$$\rightarrow G_{ij} = (\partial u_i)/(\partial x_j)$$

Matrice (3×3) que l'on décompose en une partie symétrique et une partie anti-symétrique.

$$G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$G_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij}$$

avec $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, tenseur symétrique

et $\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, tenseur anti-symétrique

$$G_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij} = (t_{ij} + d_{ij}) + \omega_{ij}$$

avec $t_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{ll} = \frac{1}{3}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}$ (sommation indice muet)

avec $d_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{ll}$

et $\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

$t_{ij} \longrightarrow$ dilatation volumique

$d_{ij} \rightarrow$ déformation angulaire sans changement de volume.

$\omega_{ij} \longrightarrow$ rotation en bloc, sans déformation

2) Tenseur des contraintes

- **Par définition, la contrainte est la valeur de force qui s'exerce sur une unité de surface.**

***Dans un fluide au repos*: elle est NORMALE aux éléments de sa surface, contrainte isotrope, il suffit d'UN NOMBRE: LA PRESSION HYDROSTATIQUE.**

***Dans un fluide en mouvement*, apparaissent des contraintes tangentes à l'élément de surface dS. Ces contraintes reflètent les forces de frottement entre des couches de fluide glissant les unes par rapport aux autres et sont dues à la VISCOSITE du fluide.**

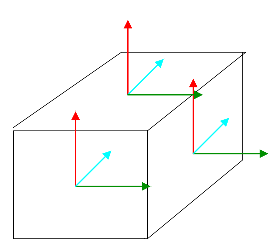
→tenseur des contraintes

On démontre que si on prend n'importe quel VOLUME infinitésimal, la force s'appliquant selon la direction (Oi) est:

$$\frac{dF_i}{dS} = \sum_{1}^{3} \sigma_{ij} n_j \quad \text{ou } dF = \overline{\sigma} dS$$

$$dF_i = \overline{\sigma}_i dS$$

$$\text{avec } \sum_{1}^{3} \sigma_{ij} n_j = \overline{\sigma}_i = \sigma_{ij} n_j \text{ (sommation indice muet)}$$



•On considère maintenant un volume fermé et on cherche l'ensemble des forces surfaciques qui s'appliquent dessus:

$$\vec{F} = \int_S d\vec{F}$$

$$F_i = \int_S dF_i = \int_S \overline{\sigma}_i dS = \int_S \vec{\sigma}_{ij} \vec{n}_j dS$$

$$\text{Green - Ostrograsky : } \int_V \operatorname{div}\vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{soit } \int_S \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dV = \oint A_i \cdot n_i dS$$

$$F_i = \int_S dF_i = \int_S \overline{\sigma}_i dS = \int_S \vec{\sigma}_{ij} (\vec{n}_j dS) = \int \frac{\partial(\sigma_{ij})}{\partial x_j} dV = \int_V \operatorname{div}(\overline{\sigma})_i dV$$

$$\text{d'où} \quad \vec{F} = \int_V \frac{\partial(\sigma_{ij})}{\partial x_j} dV = \int_V (\operatorname{div}\sigma) dV$$

On peut réécrire l'équation de la dynamique:

$$\iiint_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV = \iiint_V \vec{f} dV + \iint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS$$

$$\iiint_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV = \iiint_V \vec{f} dV + \iiint_V \operatorname{div}\sigma dV$$

$$\operatorname{div}\sigma = \left[\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} & \text{selon (Ox)} \\ \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} & \text{selon (Oy)} \\ \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{zy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} & \text{selon (Oz)} \end{array} \right.$$

Reste maintenant à exprimer proprement le terme de contrainte σ et surtout div σ.

•On peut démontrer que le tenseur des contraintes est symétrique, soit:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\iiint_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV = \iiint_V \vec{f} dV + \iiint_V \mathrm{div}\sigma dV$$

$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{f} + \vec{f}'$ où f' sont les forces de surface

On extrait des forces de surface la partie composante normale à la surface, soit les termes diagonaux du tenseur (contrainte pression):

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\,\delta_{ij} \text{ d'où}$$

$$(\mathrm{div}\sigma)_i = (\mathrm{div}\sigma')_i - \frac{\partial(\delta_{ij} p)}{\partial x_j} = (\mathrm{div}\sigma')_i - (\vec{\mathrm{grad}}\ p)_i$$

•On réécrit

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{f} + \vec{f}'$$

sous la forme:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u}\right) = \vec{f} - \vec{\nabla}p + \mathrm{div}(\sigma')$$

Reste à faire le lien entre le tenseur σ’ (tenseur de contraintes de viscosité) et le tenseur des déformations et on aura l’équation de la dynamique.

•On a vu que le tenseur des déformations se décompose en :

$$G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad G_{ij}=e_{ij}+\omega_{ij}=(t_{ij}+d_{ij})+\omega_{ij}$$

t_{ij} terme de dilatation (symétrique)

d_{ij} terme de déformation angulaire (diagonal)

ω_{ij} terme de rotation en bloc (sans déformation)

•Une rotation en bloc n’induit pas de contrainte Dans le fluide, pour notre tenseur des contraintes:

$$\omega_{ij}=0$$

•On prend comme postulat:

$\sigma'_{ij} = A d_{ij} + B t_{ij}$ où (A,B) caractérisent le fluide.

•On sait ensuite comment écrire les matrices d et t construites à partir de la matrice e, d'où l'on tire:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$t_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{ll} = \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\mathrm{div}\,\overrightarrow{u}$$

$$d_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{ll} = e_{ij} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\mathrm{div}\,\overrightarrow{u}$$

•On en déduit:

$$\sigma'_{ij} = A(e_{ij} - (\delta_{ij}/3)\ \mathrm{div}\ \vec{u}) + B((\delta_{ij}/3)\ \mathrm{div}\ \vec{u})$$

$$\sigma'_{ij} = Ae_{ij} + (B - A)\left[(\delta_{ij}/3)\mathrm{div}\ \vec{u}\right]$$

•Calculons maintenant

$$\mathrm{div}(\sigma')_i = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma'_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[Ae_{ij} + (B - A)((\delta_{ij}/3)\mathrm{div}\ \vec{u})\right]$$

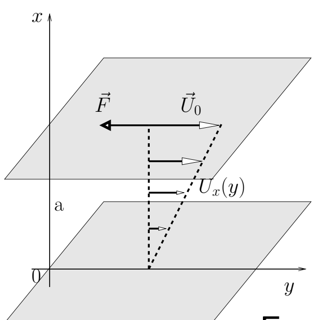
•Finalement:

$$\text{div}(\sigma')_i = \frac{A}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}(u_i) + \left(\frac{A}{6} + \frac{B}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\text{div}\,\vec{u}$$

A ?

•Expérience de Couette plan:

$$A = 2\mu$$



On a obtenu $\frac{F}{S} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$.
Or, $F = \sigma'_{xy}\, S$.

$$\rightarrow \sigma'_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} S.$$

En utilisant $\sigma'_{ij} = A e_{ij} + (B - A)\delta_{ij}\frac{\text{div}\,\vec{u}}{3}$

$$\sigma'_{xy} = A e_{xy} + (B - A)\delta_{xy}\frac{\text{div}\,\vec{u}}{3}$$

$$\sigma'_{xy} = A\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

$$\sigma'_{xy} = \frac{A}{2}\frac{\partial u_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$A = 2\mu$$

•On réécrit:

$$\mathrm{div}(\sigma')_i = \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}(u_i) + (\zeta + \frac{\mu}{3}) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathrm{div}\ \vec{u}$$

•Et sous la forme vectorielle:

$$\mathrm{div}(\sigma') = \mu \vec{\Delta} \vec{u} + (\zeta + \frac{\mu}{3}) \vec{\nabla}(\mathrm{div}\ \vec{u})$$

•avec $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

•On obtient pour l'équation Navier-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}\right) = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\Delta} \vec{u} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right) \mathrm{div} \vec{u} + \vec{\mathcal{F}}_V$$

•Si le fluide est incompressible:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}\right) = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\Delta} \vec{u} + \vec{\mathcal{F}}_V$$

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right) = -\vec{\nabla}P+\mu\vec{\Delta}\vec{u}+\vec{\mathcal{F}}_V$$

+ conditions limites: équations de l'hydrodynamique des fluides incompressibles.

•Conditions aux limites:

$$\vec{u}_{\text{solide}} = \vec{u}_{\text{fluide}} \text{ à la paroi}$$

contrainte continue

Equation du mouvement d'un fluide incompressible.

•Incompressibilité du fluide:

$$\text{div}(\vec{u}) = 0$$

•Équation de Navier-Stokes:

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right) = -\vec{\nabla}P+\mu\vec{\Delta}\vec{u}+\vec{\mathcal{F}}_V$$

+ conditions limites:

$$\vec{u}_{\text{solide}} = \vec{u}_{\text{fluide}} \text{ à la paroi}$$

contrainte continue

•Incompressibilité du fluide:

$$\mathrm{div}(\vec{u}) = 0$$

Relation entre les différentes composantes du champ de vitesse : traduit qu'un fluide NE PEUT ÊTRE COMPRIMÉ dans un volume. Relation entre les différentes composantes du champ de vitesse (ce qui rentre doit être compensé par ce qui sort.)

$$\mathrm{div}(\vec{u}) = 0$$

•En coordonnées cartésiennes

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Relation entre u_x, u_y et u_z

•En coordonnées cylindriques

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(ru_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Relation entre u_r, u_ϕ et u_z

•En coordonnées sphériques

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2u_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta u_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}$$

Relation entre u_r, u_θ et u_ϕ

•Navier-Stokes:

$$\rho\frac{D\overrightarrow{u}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{u}\right) = -\overrightarrow{\nabla}P + \mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{\mathcal{F}}_V$$

Force volumique
(Archimède, Lorentz…), FREIN ET/OU MOTEUR

Densité en kg/m3

Dérivée particulaire
du champ de vitesse

Terme d'advection non linéaire:
exploration du champ
de vitesse

Variation explicite du
champ de vitesse

Force visqueuse, FREIN

Comment écrire cette équation VECTORIELLE selon les 3 axes de coordonnées ?

$$\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{u}\right) = -\overrightarrow{\nabla}P + \mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{\mathcal{F}}_V$$

Par exemple selon l'axe (Ox)

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \mathcal{F}_x$$

En coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r}\right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2}\right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \mathcal{F}_r \ \text{ selon } (Or), \\
\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r}\right) &= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) + \mathcal{F}_\theta \ \text{ selon } (O\theta), \\
\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) \\
&\quad + \mathcal{F}_z \ \text{ selon } (Oz).
\end{aligned}$$

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

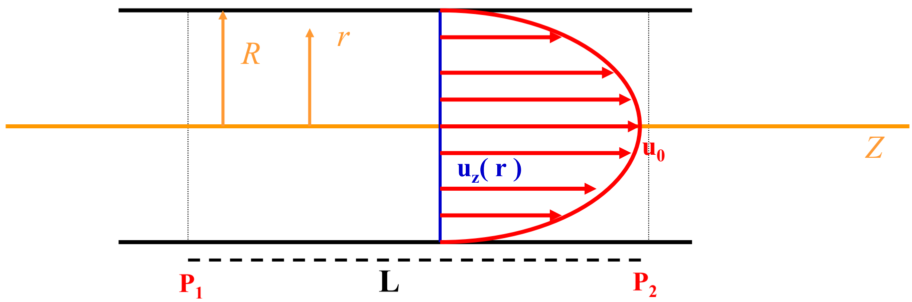
$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r}\right) =$$
$$-\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left(\Delta u_r - 2\frac{u_r}{r^2} - 2\frac{\text{cotan}\theta}{r^2}u_\theta - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}\right) + \mathcal{F}_r \quad \text{selon } (Or),$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2\text{cotan}\theta}{r}\right) =$$
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu\left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}\right) + \mathcal{F}_\theta \quad \text{selon } (O\theta),$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\phi u_\theta\text{cotan}\theta}{r}\right) =$$
$$-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \phi} + \mu\left(\Delta u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}\right) + \mathcal{F}_\phi \quad \text{selon } (O\phi)$$

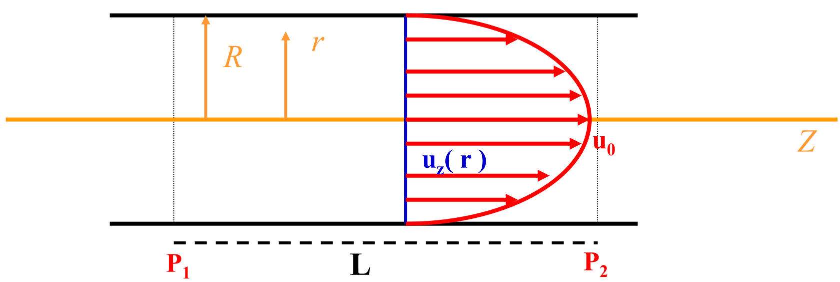
Exemple de résolution de l'équation de NS lorsque les seules forces en volume présentes sont les forces de gravité.

Considérons une conduite cylindrique dans laquelle circule un fluide. La circulation de fluide est induit par une différence de pression $\Delta P=P_2-P_1$ sur une longueur L de la conduite (c'est la différence de pression qui induit la circulation de fluide). On va démontrer avec l'équation de Navier-Stokes que l'on a dans cette configuration un profil parabolique de vitesse au sein de la conduite.



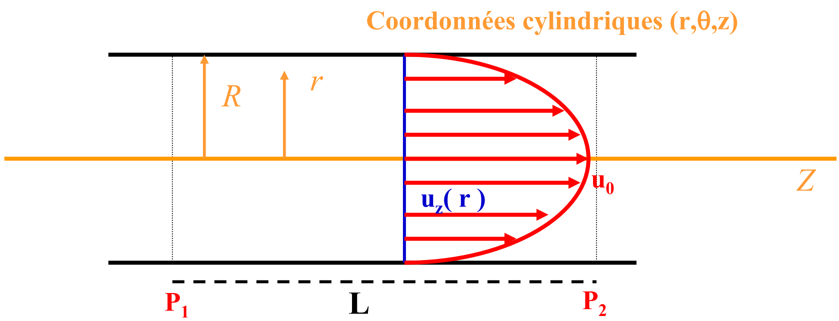
Coordonnées cylindriques (r,θ,z)

Coordonnées cylindriques (r,θ,z)



Hypothèses :

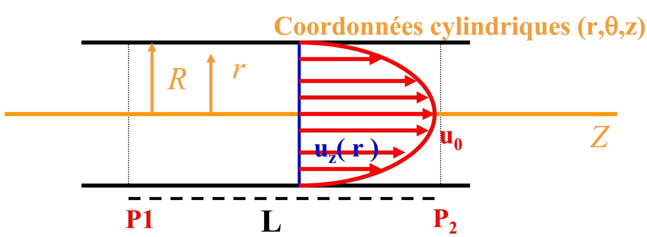
1. **Fluide incompressible**
2. **La vitesse ne dépend que de la distance à l'axe r.**
3. **$\Delta P=P_2-P_1$ est la différence de pression existant sur la distance L, on pose $K= \Delta P/L=\partial P/ \partial z$.**



1. Fluide incompressible, avec $u_r = u_\theta = 0$ et $u_z(r)$

$$\text{div}\,\vec{u} = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Se réduit à: $\dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ **Condition satisfaite ne donnant pas de contrainte supplémentaire.**



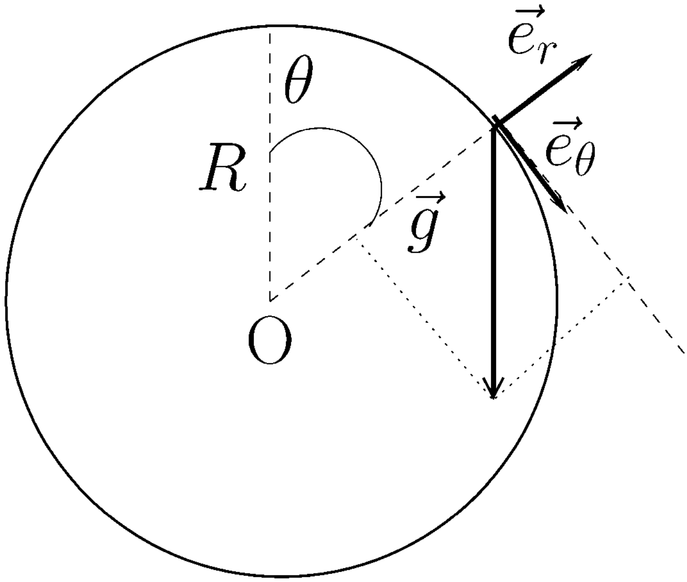
2. NS en cylindriques:

selon (Or) $\rho\left(\dfrac{D\vec{u}}{Dt}\right)_r = \vec{f}_r - \left(\vec{\nabla}p\right)_r + \mu\left(\vec{\Delta}\vec{u}\right)_r$

selon (Oθ) $\rho\left(\dfrac{D\vec{u}}{Dt}\right)_\theta = \vec{f}_\theta - \left(\vec{\nabla}p\right)_\theta + \mu\left(\vec{\Delta}\vec{u}\right)_\theta$

selon (Oz) $\rho\left(\dfrac{D\vec{u}}{Dt}\right)_z = \vec{f}_z - \left(\vec{\nabla}p\right)_z + \mu\left(\vec{\Delta}\vec{u}\right)_z$

a) Pas de dépendance temporelle, b) $u_r=0$, $u_\theta=0$



Se réduit à :

(1) selon (Or) $0 = f_r - \left(\vec{\nabla} p\right)_r = -\rho g \cos\theta - \dfrac{\partial p}{\partial r}$

(2) selon (Oθ) $0 = f_\theta - \left(\vec{\nabla} p\right)_\theta = +\rho g \sin\theta - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta}$

(3) selon (Oz) $0 = -\left(\vec{\nabla} p\right)_z + \mu\left(\vec{\Delta}\vec{u}\right)_z$

$$= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right)$$

(1) Et (2) montrent que la pesanteur établit un gradient hydrostatique, qui ne joue aucun rôle concernant le champ de vitesse.

$$(3)\ \text{selon}\ (Oz)\quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right) = -K + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right)$$

On intègre une fois cette équation pour obtenir Uz(r)

$$\frac{K}{\mu} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right) \Rightarrow \frac{K}{\mu}\frac{r^2}{2} = r\frac{\partial u_z}{\partial r} + B \Rightarrow \frac{K}{\mu}\frac{r}{2} + \frac{B}{r} = \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

Puis une seconde fois $\quad u_z(r) = \frac{K}{\mu}\frac{r^2}{4} + B\ln r + A$

On utilise maintenant les conditions limites: u_z (R) =0 (condition de non-glissement) et $u_z(0)$ reste bornée. On en déduit finalement:

$$\boxed{u_z(r) = \frac{K}{4\mu}(r^2 - R^2) = u_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$

LE CHAMP DE VITESSE A BIEN UN PROFIL PARABOLIQUE COMME PREVU

On peut ensuite calculer le débit à travers la conduite: $\quad Q = \int_0^R \vec{u}\cdot dS\vec{n}$

ADIMENSIONNER UNE EQUATION

•Pourquoi?

Cela permet de voir, une fois l'équation adimensionnée, quels termes sont importants dans l'équation.

•Comment ?

On part d'une équation dimensionnée (avec des unités physiques par exemple u en m/s etc..) , par exemple l'équation de Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}\right) = \vec{f} - \vec{\nabla}p + \mu\vec{\Delta}\vec{u}$$

Et on construit une nouvelle équation du type suivant:

$$\left(A\frac{\partial \vec{U}^*}{\partial t^*} + B\vec{U}^*\cdot\vec{\nabla}\vec{U}^*\right) = C\vec{f}^* - D\vec{\nabla}p^* + E\vec{\Delta}\vec{U}^*$$

où les valeurs avec des étoiles sont sans-dimension (d'ordre 1). Il suffit alors dans l'exemple ci dessus de comparer les termes A, B, C, D et E pour savoir quels termes sont importants, quels termes dominent.

ADIMENSIONNER UNE EQUATION

Adimensionnons l'équation de Navier-Stokes lorsque f=0. On a:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}\right) = -\vec{\nabla}p + \mu\vec{\Delta}\vec{u}$$

1. ***ρ et μ sont des grandeurs physiques dimensionnées. Elles caractérisent le fluide et ses propriétés. IL NE FAUT PAS LES ADIMENSIONNER. Ce sont des valeurs CONSTANTES.***
2. ***On a des dérivées temporelles ($\partial U/ \partial t$) , des dérivées spatiales (∇U, ∇p , ΔU). On introduit alors des GRANDEURS CARACTERISTIQUES en espace et en vitesse: L_O et U_0 .On réécrit alors toutes les grandeurs physiques que l'on veut adimensionner en utilisant ces grandeurs caractéristiques:***

$$u = U_0 u^*$$

$$t = \frac{L_0}{U_0} t^*$$

$$p = p_O p^*$$

où les valeurs avec des étoiles sont sans dimension.

ADIMENSIONNER UNE EQUATION

$$u = U_0 u^*$$

$$t = \frac{L_0}{U_0} t^*$$

$$p = p_O p^*$$

$$+$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{U_0}{L_0}\frac{\partial}{\partial t^*}$$

$$\nabla(\ ) = \frac{1}{L_0}\nabla(\ )^*$$

$$\Delta(\ ) = \frac{1}{L_0^2}\Delta(\ )^*$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}\right) = -\vec{\nabla}p + \mu\vec{\Delta}\vec{u} \Rightarrow$$

$$\rho\left(U_0\frac{U_0}{L_0}\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + U_0\frac{1}{L_0}U_0\vec{u}^*.\vec{\nabla}\vec{u}^*\right) = -p_0\frac{1}{L_0}\vec{\nabla}p^* + U_0\frac{1}{L_0^2}\mu\vec{\Delta}\vec{u}^* \Rightarrow$$

$$\rho\left(\frac{U_0^2}{L_0}\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \frac{U_0^2}{L_0}\vec{u}^*.\vec{\nabla}\vec{u}^*\right) = -p_0\frac{1}{L_0}\vec{\nabla}p^* + \mu\frac{U_0}{L_0^2}\vec{\Delta}\vec{u}^* \Rightarrow$$

A ce stade, l'équation est adimensionnée. Il faut maintenant savoir quels sont les termes que l'on veut comparer.

ADIMENSIONNER UNE EQUATION

$$\rho\left(\frac{U_0^2}{L_0}\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \underline{\frac{U_0^2}{L_0}\vec{u}^*\cdot\vec{\nabla}\vec{u}^*}\right) = -p_0\frac{1}{L_0}\vec{\nabla}p^* + \underline{\mu\frac{U_0}{L_0^2}\vec{\Delta}\vec{u}^*} \Rightarrow$$

On s'intéresse par exemple à la turbulence hydrodynamique de notre système et pour cela on veut comparer les forces d'inertie et les forces visqueuses.

$$\left(\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \vec{u}^*\cdot\vec{\nabla}\vec{u}^*\right) = -\frac{p_0}{\rho}\frac{1}{U_0^2}\vec{\nabla}p^* + \mu\frac{U_0}{\rho L_0^2}\frac{L_0}{U_0^2}\vec{\Delta}\vec{u}^* \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \vec{u}^*\cdot\vec{\nabla}\vec{u}^*\right) = -\frac{p_0}{\rho}\frac{1}{U_0^2}\vec{\nabla}p^* + \overbrace{\frac{\nu}{U_0L_0}}^{1/Re}\vec{\Delta}\vec{u}^* \Rightarrow}$$

On en déduit que le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses est le nombre de Reynolds (sans dimension):

$$Re = \frac{\rho}{\mu}U_0L_0 = \frac{U_0L_0}{\nu} = \frac{\text{termes inertiels}}{\text{termes diffusifs}}$$

ADIMENSIONNER UNE EQUATION

$$\boxed{Re = \frac{U_0L_0}{\nu} = \frac{\text{termes inertiels}}{\text{termes diffusifs}}}$$

Suivant cet adimensionnement, deux cas de figures se présentent:

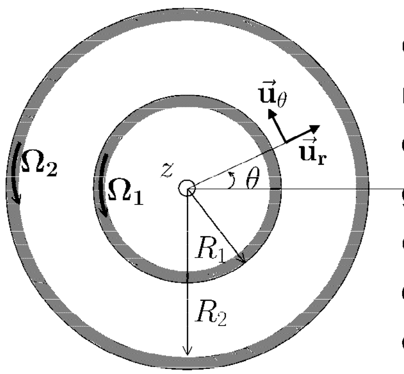
1. **Soit Re << 1, alors les forces visqueuses dominent:**

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}p + \mu\vec{\Delta}\vec{U}$$

2. **Soit Re >> 1, alors les forces inertielles dominent:**

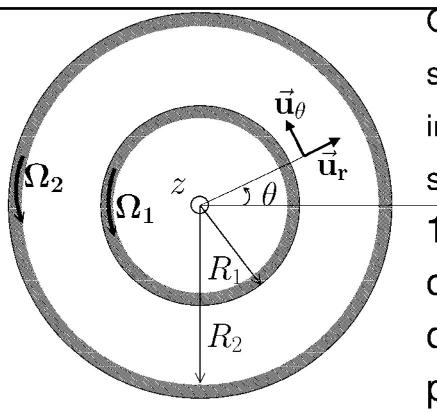
$$\rho\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U}\cdot\vec{\nabla}\vec{U}\right) = -\vec{\nabla}p$$

Ecoulement de Couette cylindrique.



Soit un fluide incompressible de viscosité dynamique μ, compris entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2, tournant autour de leur axe avec des vitesses angulaires $\mathbf{\Omega_1}$ et $\mathbf{\Omega_2}$. Aucun gradient extérieur de pression n'est appliqué. On choisit les coordonnées cylindriques (r, θ, z) où l'axe Oz est confondu avec celui des cylindres.

On cherche à determiner les composantes u_r, u_θ, u_z.

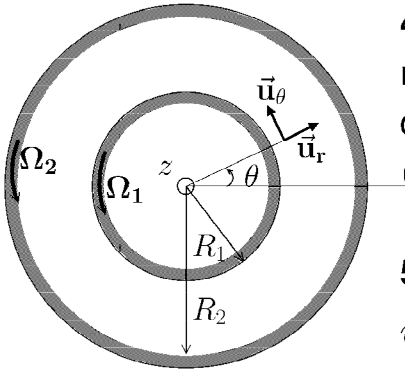


On cherche l'écoulement le plus simple, avec un champ de vitesse independant de x et θ (régime observé aux faibles vitesses).

1) Pourquoi peut-on considérer selon les hypothèses que $\overrightarrow{u}_z = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{u}_\theta$ indépendant de θ ?

2) Que déduit-on concernant u_r de l'équation de conservation de la masse ?

3) Ecrire l'équation de Navier–Stokes projetée selon les trois axes des coordonnées.

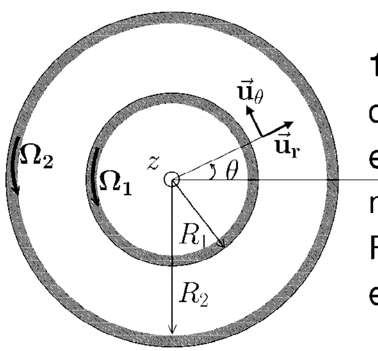


4) Quelles informations nous apporte la projection de Navier–Stokes selon (Or) ?

5) Chercher une solution de $u_\theta(r)$ sous la forme $ar + \frac{b}{r}$.

6) En déduire que :

$$u_\theta(r) = \frac{\left(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2\right)}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{\left((\Omega_1 - \Omega_2)\, R_2^2 R_1^2\right)}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}$$

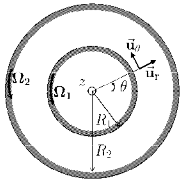


1) En absence de gradient de pression selon (Oz) et en tenant compte de la symétrie du problème, u_z=0. Par symétrie également, u_θ est indépendant de θ.

2) On écrit l'équation de conservation de la masse :

$$\text{div}\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r} = 0$$

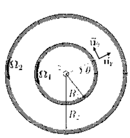
$\rightarrow$ On cherche u_r sous la forme $u_r = (C/r)$ où C est une constante à determiner.



Les conditions aux limites sur les parois solides imposent $u_r(r = R_1) = u_r(r = R_2) = 0$; on en conclut $u_r(r) = 0 \ \forall \ r$ compris entre R_1 et R_2.

3) L'équation de Navier–Stokes projetés selon $(0r)$, (0θ), $(Oz$ respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{u_\theta^2}{r} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} \\ \nu\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2}\right) &= 0 \\ g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{u_\theta^2}{r} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} \\ \nu\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2}\right) &= 0 \\ g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

4) La première equation nous informe que le terme $\left(u_\theta^2/r\right)$ est une force d'inertie centrifuge due à la trajectoire curviligne des particules. Ce terme est équilibré par le gradient de pression dans la direction radiale.

La deuxième équation ne contient que les termes du laplacien de la vitesse en cylindriques (terme visqueux).

Enfin la troisième equation assure un gradient de pression hydrostatique dans la direction verticale.

5) On cherche alors une solution de l'equation projetée selon θ sous la forme :

$$u_\theta(r) = a\,r + \frac{b}{r}$$

où les constantes a et b sont à déterminer par les conditions aux limites $u_\theta(r = R_1) = \Omega_1 R_1$ et $u_\theta(r = R_2) = \Omega_2 R_2$.

On obtient directement :

$$u_\theta(r) = \frac{\left(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2\right)}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{\left((\Omega_1 - \Omega_2)\, R_2^2 R_1^2\right)}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}$$

6) Différentes remarques :

- On peut alors déterminer le profil de pression en intégrant l'equation de Navier–Stokes projeté selon r.

- Si $\Omega_1 = \Omega_2$, alors $u = \Omega r$, ce qui correspond à un mouvement de rotation solide du fluide.

- Dans le cas où seul le cylindre intérieur tourne, et pour une vitesse de rotation Ω_1 du cylindre intérieur supérieure à une valeur critique Ω_c, l'écoulement devient alors instable. Il apparaît un écoulement secondaire turbulent sous la forme de rouleaux toroïdaux.