Mécanique des Fluides Géophysiques.

4. Introduction aux équations du mouvement dans un référentiel tournant.

4. Introduction aux équations du mouvement dans un référentiel tournant.

Pourquoi?

1) Parce que la Terre tourne….

2) Dans le manteau terrestre, comme on l'a vu, la forte viscosité contrôle les mouvements: on peut penser que la rotation de la Terre a une influence négligeable…

Par contre, la rotation joue un rôle capital dans la dynamique de l'atmosphère, de l'océan et du noyau terrestre (différence avec le manteau: la viscosité du fluide est faible…). On va démontrer cette importance avec des arguments dimensionnels d'ordre de grandeur des forces (nombres sans dimensions).

On va montrer que l'équation de Navier–Stokes dans un référentiel fixe

$$\rho\frac{D\overrightarrow{u}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{u}\right) = -\overrightarrow{\nabla}P + \mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{\mathcal{F}}_V$$

va se réecrire dans un référentiel en rotation à une vitesse constante $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\overrightarrow{e}_z$ de la manière suivante :

$$\rho\frac{D\overrightarrow{u}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{u}\right) = ... + \mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u} + 2\rho\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{\Omega}$$

Sachant que l'équation de la dynamique dans un référentiel en rotation s'écrit :

$$\rho\frac{D\overrightarrow{u}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{u}\right) = ... + \mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u} + 2\rho\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{\Omega}$$

où $\overrightarrow{\Omega}$ est le vecteur rotation de la Terre,
montrez que la **force de Coriolis est importante par rapport aux forces visqueuses dans l'atmosphère et pas importante dans le manteau**. On construira un nombre sans dimension quantifiant le rapport des deux forces et on l'estimera.

$A.N.$: $U_{0\ \text{manteau}} = 10^{-9}$ m/s, $\nu_{\text{mant.}}=10^{17}$ m^2/s.
$U_{0\ \text{atmosphère}} = 10^{-4}$ m/s, $\nu_{\text{atmo.}}=10^{-6}$ m^2/s.

$$E \equiv \frac{\left[\mu \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{u}\right]}{\left[2\rho \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{\Omega}\right]} \equiv \frac{\left[\nu \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{u}\right]}{\left[2 \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{\Omega}\right]} \equiv \frac{\nu U_0}{L_0^2 2\Omega_0 U_0}$$

$$E = \frac{\nu}{2\Omega_0 L_0^2}$$

$A.N.$ $\Omega_0 \simeq 7\,10^{-5}$ rad / s, $L_{0\text{manteau}} = L_{0\text{atmosphère}} = 10^6$ m

$u_{0\text{ manteau}} = 10^{-9}$ m/s, $\nu_{\text{ mant.}} = 10^{17}\text{m}^2/\text{s}$

$u_{0\text{ atmosphère}} = 10^{-4}$m/s, $\nu_{\text{ atmo.}} = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$

$$\Rightarrow E_{\text{manteau}} \simeq 10^{-14}$$

$$\Rightarrow E_{\text{atmosphère}} \simeq 10^{9}$$

Lorsqu'on étudie un mouvement, il faut toujours commencer par définir des positions et des vitesses. Toute étude de mouvement commence donc par le choix du référentiel.

Un référentiel est muni d'un repère, c'est-à-dire un point origine et 3 axes permettant de repérer tout point. Il faut cependant noter que le choix du référentiel ne changera pas les conclusions physiques: ***changer de référentiel ne change pas la nature du problème, mais sert simplement à simplifier celui-ci d'un point de vue mathématique.***

Considérons un **objet ne subissant aucune force physique** (c'est-à-dire liée à une interaction physique : électrique, magnétique, frottements...), par exemple **un palet sur une patinoire**, pour lequel les frottements sont assez faibles pour être négligés. Le bon sens nous dit que l'objet garde une vitesse et une direction constante : il a un **MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME**.

Ceci constitue le ***principe d'inertie*** **: si aucune force ne s'applique sur un mobile, il garde un mouvement rectiligne uniforme (ou reste immobile : mais c'est un cas particulier de mouvement rectiligne uniforme).** Cette assertion est vrai dans un **référentiel galiléen**. De nombreux référentiels ne sont pas galiléens, comme on va le voir plus loin. . .

Dans un tel référentiel galiléen, la loi de Newton, qui relie force et accélération, s'applique :

$$\overrightarrow{F} = m\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}$$

Lorsque le référentiel **n'est plus galiléen**, on ne peut plus appliquer simplement la relation

$$\overrightarrow{F} = m\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}$$

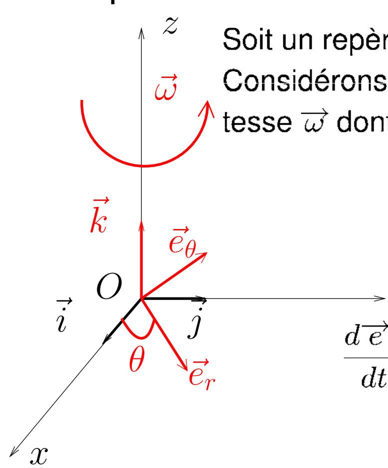
Pour conserver une loi ressemblant à la loi de Newton, on garde la loi de Newton ***à condition*** **d'ajouter aux forces physiques ,** des "pseudo-forces" ou "forces d'inertie" qui se calculent en connaissant les caractéristiques du référentiel. On aura alors

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_{\mathsf{inertie}} = m\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}$$

Pour notre cours, le référentiel dont nous nous servons est le référentiel terrestre, défini par un point de la surface de la Terre, et trois directions fixes pour un observateur placé en ce point, par exemple la verticale, l'Est et le Nord. Un tel référentiel est en rotation par rapport au centre de la Terre. Il va donc nous falloir étudier les référentiels en rotation, *cas particuliers de référentiels non-galiléens.*

$\Rightarrow$ Calculons les forces d'inertie dans la cas particulier des repères en rotation.

$\Rightarrow$ Calculons les forces d'inertie dans la cas particulier des repères en rotation.



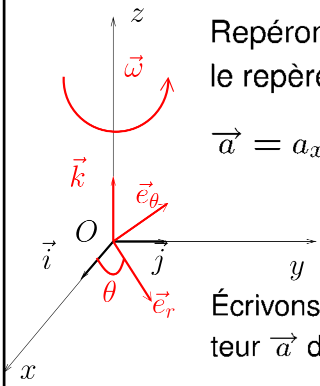
Soit un repère fixe cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Considérons maintenant un repère tournant à la vitesse $\vec{\omega}$ dont les vecteur unitaires sont $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$

$$\vec{e}_r = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\sin\theta \frac{d\theta}{dt}\vec{i} + \cos\theta \frac{d\theta}{dt}\vec{j} = \omega\, \vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\cos\theta \frac{d\theta}{dt}\vec{i} - \sin\theta \frac{d\theta}{dt}\vec{j} = -\omega\, \vec{e}_r$$



Repérons maintenant un vecteur quelconque $\overrightarrow{a}$ dans le repère fixe et dans le repère cartésien :

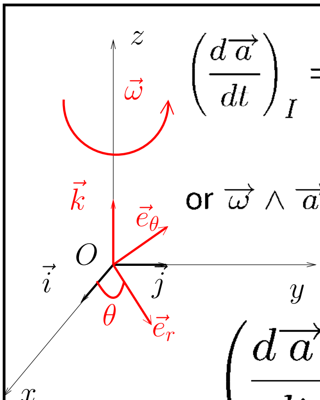
$$\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} = a_r \overrightarrow{e}_r + a_\theta \overrightarrow{e}_\theta + a_z \overrightarrow{k}$$

Écrivons maintenant la dérivée temporelle de ce vecteur $\overrightarrow{a}$ dans le repère inertiel (ou galiléen) :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{a}}{dt}\right)_I = \frac{da_x}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{da_y}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{da_z}{dt}\overrightarrow{k}$$

$$= \frac{da_r}{dt}\overrightarrow{e}_r + a_r\frac{d\overrightarrow{e}_r}{dt} + \frac{da_\theta}{dt}\overrightarrow{e}_\theta + a_\theta\frac{d\overrightarrow{e}_\theta}{dt} + \frac{da_z}{dt}\overrightarrow{k}$$

$$= \frac{da_r}{dt}\overrightarrow{e}_r + \frac{da_\theta}{dt}\overrightarrow{e}_\theta + \frac{da_z}{dt}\overrightarrow{k} + a_r\omega\overrightarrow{e}_\theta - a_\theta\omega\overrightarrow{e}_r$$



$$\left(\frac{d\overrightarrow{a}}{dt}\right)_I = \frac{da_r}{dt}\overrightarrow{e}_r + \frac{da_\theta}{dt}\overrightarrow{e}_\theta + \frac{da_z}{dt}\overrightarrow{k} + a_r\omega\overrightarrow{e}_\theta - u_\theta\omega\overrightarrow{e}_r$$

or $\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{a} = -\omega\, a_\theta\, \overrightarrow{e}_r + \omega\, a_r\, \overrightarrow{e}_\theta$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{a}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\overrightarrow{a}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{a}$$

Cette relation donnant les variations temporelles d'un vecteur quelconque dans le repère inertiel et dans le repère relatif est valable pour un champ de vecteur quelconque $\overrightarrow{a}$.

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \wedge \vec{a}$$

Choisissons maintenant le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{a}$ et appliquons la relation précédente :

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_I = \vec{u}_I = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_I = \vec{u}_R + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Choisissons maintenant le vecteur vitesse $\vec{u}_I = \vec{a}$
et appliquons la relation précédente :

$$\left(\frac{d\vec{u}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{u}_I}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \wedge \vec{u}_I$$

$$\left(\frac{d\vec{u}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{u}_R}{dt}\right)_R + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \wedge (\vec{u}_R + \vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

$$\left(\frac{d\vec{u}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{u}_R}{dt}\right)_R + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{u}_R + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\text{or } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_R.$$

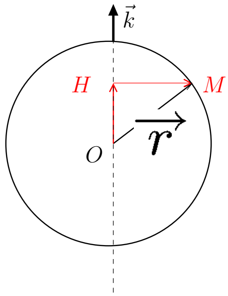
On en conclut

$$\left(\frac{d\vec{u}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{u}_R}{dt}\right)_R + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{u}_R + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Force de Coriolis : $2\vec{\omega} \wedge \vec{u}_R$

Force centrifuge : $\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

Force centrifuge



$$\vec{r} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega\, \vec{k} \wedge OH\, \vec{k} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega\, \vec{k} \wedge \overrightarrow{HM} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM}$$

Or $\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) \vec{B} - \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) \vec{C}$

$$\Leftrightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM}\right) = \left(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{HM}\right) \vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}\right) \overrightarrow{HM}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

La force associée est $\rho\omega^2 \overrightarrow{HM}$. Elle « éloigne » le point M de l'axe de rotation.

Force de Coriolis

Accélération associée : $2\vec{\omega} \wedge \vec{u}_R$

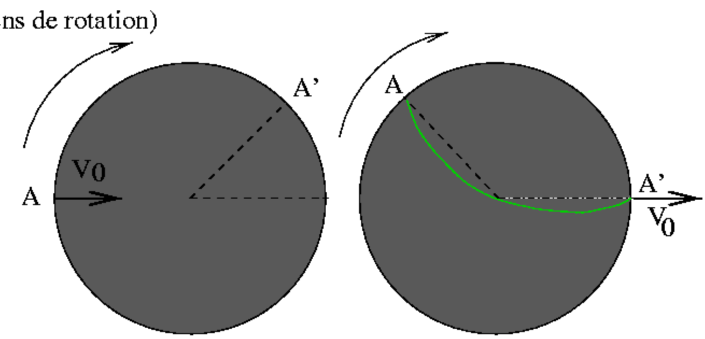
Force associée : $-2\rho\, \vec{\omega} \wedge \vec{u}_R$ perpendiculaire à $\vec{u}_R$.

Cette force dévie toutes particules perpendiculairement à sa trajectoire.

La FORCE DE CORIOLIS: la force de Coriolis dévie les objets qui sont en mouvement dans le référentiel terrestre

Attention: cette "force" n'est pas une "vraie force physique", elle est juste un moyen d'exprimer que les lois de la mécanique changent lorsqu'on change de point de vue.

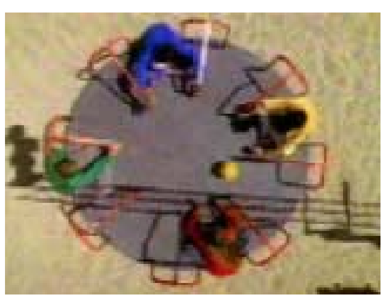
Exemple:



A l'instant initial

Après t... le mobile ne sort pas en face de A ; sa trajectoire est en vert.

EXPERIENCE SUR LA FORCE DE CORIOLIS



Expérience filmée et imaginée par les chercheurs du Jet Propulsion Laboratory

Réecrivons Navier–Stokes dans un repère en rotation uniforme $\vec{\omega}$

On avait

$$\rho\left(\frac{D\vec{u}}{Dt}\right)_I = \rho\left(\frac{\partial \vec{u}_I}{\partial t} + \left(\vec{u}_I \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}_I\right) = -\vec{\nabla}P + \mu\vec{\Delta}\vec{u}_I + \vec{\mathcal{F}}_V$$

Le changement de référentiel n'affecte pas les dérivées spatiales.

$$\Rightarrow \left(\vec{u}_I \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}_I = \left(\vec{u}_R \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}_R.$$

$$\Rightarrow \vec{\Delta}\vec{u}_I = \vec{\Delta}\vec{u}_R.$$

On a démontré auparavant que

$$\left(\frac{d\vec{u}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{u}_R}{dt}\right)_R + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r} + 2\vec{\omega}\wedge\vec{u}_R + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}.$$

On en déduit que

$$\rho\left[\left(\frac{d\vec{u}_R}{dt}\right)_R + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r} + 2\vec{\omega}\wedge\vec{u}_R + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right]$$

$$= -\vec{\nabla}P + \mu\vec{\Delta}\vec{u}_R + \vec{\mathcal{F}}_V$$

$$\Leftrightarrow \rho\left(\frac{\partial \vec{u}_R}{\partial t} + \left(\vec{u}_R \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}_R\right) = -\vec{\nabla}P + \mu\vec{\Delta}\vec{u}_R + \vec{\mathcal{F}}_V$$

$$-2\rho\vec{\omega}\wedge\vec{u}_R - \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r} - \rho\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}$$

En considérant une rotation uniforme, on a $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial \vec{u}_R}{\partial t} + \left(\vec{u}_R \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}_R\right) = -\vec{\nabla}P + \mu\vec{\Delta}\vec{u}_R + \vec{\mathcal{F}}_V -$$

$$2\rho\vec{\omega}\wedge\vec{u}_R - -\rho\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial \overrightarrow{u}_R}{\partial t}+\left(\overrightarrow{u}_R\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{u}_R\right)=-\overrightarrow{\nabla}P+\mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u}_R+\overrightarrow{\mathcal{F}}_V-$$

$$2\rho\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{u}_R-\rho\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{r}$$

Réécrivons la force centrifuge sous la forme d'un gradient de potentiel. On a montré que $\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{r}$ s'écrit $-\omega^2\overrightarrow{HM}=-\omega^2\overrightarrow{r_\perp}$ où $r_\perp$ est ici le rayon projeté sur un plan horizontal ou encore la distance à l'axe de rotation.

On vérifie alors que si $\phi=\dfrac{\omega^2 r_\perp^2}{2}$ alors on a bien $-\overrightarrow{\nabla}\phi=\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{r}$.

On peut alors inclure la force centrifuge sous le terme de gradient de pression, tel que : $\overrightarrow{\nabla}\left(P+\rho\phi\right)=\overrightarrow{\nabla}P'$. P' est alors une pression modifiée prenant en compte la force centrifuge.

Par souci de simplification des notations, nous omettons désormais l'indice $_R$ pour l'écriture des vitesses dans le référentiel en rotation ; de même on note P la pression modifiée $P+\rho\phi$.

Navier–Stokes se réécrit finalement

$$\rho\frac{D\overrightarrow{u}}{Dt}=\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial t}+\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{u}\right)=$$

$$-\overrightarrow{\nabla}P+\mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u}+\overrightarrow{\mathcal{F}}_V+2\rho\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{\omega}$$

Résumons

Dans un référentiel galiléen (laboratoire), on écrit :

$$\overrightarrow{F} = m\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}$$

Dans le cas où notre référentiel (Terre) est en rotation **UNIFORME** par rapport au référentiel galiléen à la vitesse $\overrightarrow{\Omega}$, on a démontré que l'équation de la dynamique se réécrit :

$$\overrightarrow{F} = m\left(\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} + 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{u} + \Omega^2 \overrightarrow{r}_\perp\right)$$

où $\overrightarrow{u}$ est la vitesse du fluide DANS LE RÉFÉRENTIEL EN ROTATION

CORIOLIS
(dévie la trajectoire des particules)

CENTRIFUGE
(horizontal localement)

Équations gouvernant le problème de la dynamique des fluides en rotation, incompressible. $\overrightarrow{u}$ vitesse du fluide dans le repère en rotation.

1. Équation de conservation de la masse (incompressibilité du fluide..).

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}) = 0$$

2. Équation de la conservation de quantité de mouvement (Navier-Stokes).

$$\rho\frac{D\overrightarrow{u}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{u}\right) =$$

$$-\overrightarrow{\nabla}P + \mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{\mathcal{F}}_V + 2\rho\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{\omega}$$

3. Équation de la chaleur.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)T\right) - \kappa\Delta T = \frac{A}{\rho C_p}$$