# Licence 3 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

**U.E. TUE 302, Outil Physique et Géophysique, 2006/2007**

# Contrôle Continu

## Mercredi 11 Octobre 2006 – *Durée :* 1 heure 30 minutes

*Calculatrice non autorisée. Le formulaire mathématique recto-verso distribué en cours est le seul document autorisé durant l'épreuve.*

---

## Exercice 1 – Question de cours – Application du théorème de Green-Ostrogradsky

On a vu en cours le théorème suivant :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \overrightarrow{A} dV = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{S}.$$

**a)** Précisez comment sont reliés $\mathcal{V}$ et $\mathcal{S}$ dans le cadre de ce théorème.

On considère le champ vectoriel suivant exprimé en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{A}(\rho, \theta, z) = 3\rho^2 \overrightarrow{e}_\theta + 2 \overrightarrow{e}_z.$$

**b)** Calculez le flux de $\overrightarrow{A}$ à travers un cylindre de rayon $R$ centré en $O$ (origine du repère cylindrique), de hauteur $2R$ ($0 \leq z \leq 2R$).

**c)** Calculez la divergence du champ vectoriel $\overrightarrow{A}$. En déduisez-vous que les réponses aux questions b) et c) sont cohérentes entre elles, pourquoi ?

**d)** Combien vaut le flux de $\overrightarrow{A}$ à travers une surface fermée ellipsoïdale centrée en $O$ (origine du repère cylindrique) de demi-grand axe de longueur $a$ et de demi-petit axe de longueur $b$ ?

---

## Exercice 2 – Champ électrostatique créé par un disque uniformément chargé

Soit un disque de rayon $R$ portant une charge totale $Q$ uniformément répartie à sa surface.

On place un repère de coordonnées cartésiennes centré sur le centre du disque telle que l'axe $(Oz)$ est normal à la surface du disque. On a vu en TD que le champ électrostatique généré par une telle distribution de charges électrostatiques s'écrit au niveau de l'axe $(Oz)$ en un point $M$ de coordonnées $(0,0,z)$ sous la forme

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(0,0,z) = E_z(z)\vec{e}_z \quad \text{avec } E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \tag{1}$$

où $\vec{e}_z$ désigne le vecteur unitaire porté par $(Oz)$ dirigé vers le haut, où $O$ est le centre du disque et l'origine du repère cartésien.

**a)** Que désigne $\sigma$ et quelles sont ses unités ?

**b)** On vous demande d'expliquer dans les grands traits le calcul qui a amené à obtenir la formule 1. (On ne vous demande pas de refaire la démonstration ! ). On vous demande de donner la formule utilisée au départ, de bien préciser les notations utilisées, de préciser les symétries utilisées, de s'aider éventuellement d'un dessin etc...

**c)** On vous demande de démontrer que lorsqu'on s'éloigne du disque tout en restant sur l'axe $(Oz)$, on retrouve un résultat connu pour l'expression du champ électrostatique, si on prend soin de se placer dans le cadre d'hypothèses particulières que vous expliciterez. On utilisera un développement limité pour répondre à cette question.

---

## Exercice 3 – Boule enfouie à une profondeur $h$.

**a)** A l'aide du théorème de Gauss, calculer le champ de gravité $\vec{g}$ à l'extérieur d'une sphère homogène de rayon $R$ de densité $\rho$. Donner le résultat en fonction de $\mathcal{G}$, $\rho$, $R$ et $r$ (distance au centre de la sphère).

**b)** On veut déterminer la signature gravimétrique en surface d'une boule (sphérique) de rayon $R$ dont le centre $O$ se trouve enfouie à une profondeur $h$ au sein d'un milieu supposé homogène, la croûte terrestre. On suppose que la croûte a une masse volumique $\rho_c$ (3000 kg/m$^3$) et que la sphère a pour masse volumique $\rho$ (10000 kg/m$^3$).

Démontrer alors que la composante verticale (composante $z$) de l'anomalie gravimétrique créée par cette masse en surface ($z = 0$), à une distance $x$ de l'intersection entre l'axe vertical passant par le centre de la sphère et la surface terrestre vaut :

$$\Delta g(x) = \frac{4\pi}{3}\mathcal{G}\Delta\rho\frac{hR^3}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

où $\Delta\rho = \rho - \rho_c$, $\mathcal{G} = 6.67\ 10^{-11}$ S.I. . On prendra $\vec{e}_z$ pointant vers la bas.

**c)** On dispose d'un appareil de mesure gravimétrique pouvant mesurer le $\mu$Gal (1 Gal = 10 $^{-2}$ m/s$^2$). Est-ce qu'une telle boule de 2 mètres de rayon dont le centre se retrouve à 5 mètres de profondeur peut être détectée avec cet appareil à l'aplomb de l'anomalie (en $x = 0$) ?

---