Licence 3 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 302, Outil Physique et Géophysique, 2005/2006

Contrôle Continu

Jeudi 3 Novembre 2005 – *Durée :* 1 heure 30 minutes

Calculatrice autorisée. Le formulaire mathématique recto-verso distribué en cours est le seul document autorisé durant l'épreuve.

Exercice 1 – Question de cours – Application du théorème de Stokes

On a vu en cours le théorème suivant :

$$\oint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{A} \cdot d\,\overrightarrow{l} = \iint_{S} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{S}.$$

a) Précisez comment sont reliés $\mathcal{L}$ et $\mathcal{S}$ dans le cadre de ce théorème.

On considère le champ vectoriel suivant exprimé en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{A}(\rho, \theta, z) = 3\rho^2\,\overrightarrow{e}_\theta + 2z\,\overrightarrow{e}_z.$$

b) Calculez la circulation de $\overrightarrow{A}$ le long d'un cercle de rayon R centré en O (origine du repère cylindrique) et appartenant au plan horizontal ($z = 0$).

c) Calculez le champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}(\rho, \theta, z)$.

d) Calculez le flux du champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$ à travers une demi-sphère de rayon R, centrée en O et dont le cercle équatorial repose sur le plan horizontal ($z = 0$).

e) Retrouvez-vous le résultat prédit par le théorème de Stokes ?

Exercice 2 – Reconnaissance d'un système électrostatique chargé

On considère la distribution de charges électrostatiques donnant naissance au potentiel électrostatique suivant exprimé écrit en coordonnées cylindriques :

$$V(\rho, \theta, z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{\rho}\right)$$

où λ et a sont des constantes.

a) Calculez le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(\rho, \theta, z)$ associé au potentiel V.

b) Tracez qualitativement les lignes d'équipotentiel (lignes où le potentiel est constant) ainsi que les lignes du champ électrostatique (lignes tangentes en tout point au champ $\overrightarrow{E}$) en expliquant brièvement comment vous obtenez ces lignes.

c) À partir des lignes d'équipotentiel et des lignes de champ électrostatique obtenues à la question c), en déduire comment sont distribuées dans l'espace les charges électrostatiques à l'origine du potentiel V et du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$.

Exercice 3 – Champ de gravité d'une planète à deux couches

Un astrophysicien est en charge d'interpréter des mesures gravimétriques (mesures du champ de gravité $\overrightarrow{g}$ et du potentiel gravitationnel U) effectuées à bord d'un satellite qui a gravité autour d'une planète (supposée sphérique) de rayon R_P comme schématisé sur la figure 1. Les mesures ont été réalisées à plusieurs hauteurs h par rapport à la surface de la planète.

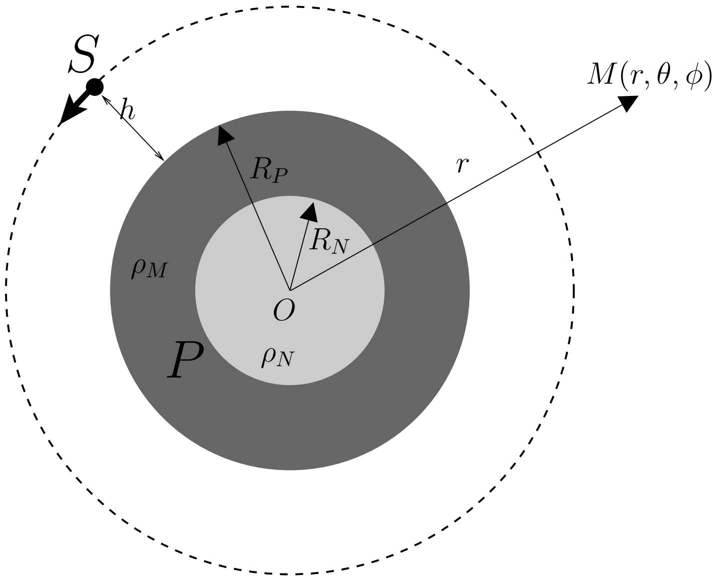

FIG. 1 – Planète P et satellite de mesure S gravitant autour à une hauteur h. La planète P est considérée comme parfaitement sphérique de rayon R_P, avec deux couches internes de densités distinctes, un noyau de densité ρ_N et un manteau de densité ρ_M.

Pour chaque hauteur h, le satellite a décrit plusieurs cycles de révolution autour de la planète afin d'obtenir une cartographie fine des variations spatiales de $\overrightarrow{g}$ et U en fonction de θ et ϕ (respectivement la colatitude et la longitude des coordonnées sphériques attachées au centre de la planète O).

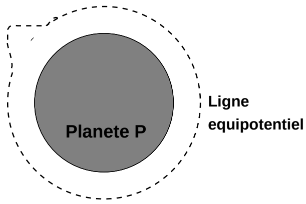

FIG. 2 – Ligne d'équipotentiel décrivant une « bosse » au dessus d'une région particulière de la planète P.

a) Les mesures de potentiel U indiquent un potentiel de gravité constant en fonction du rayon r à l'extérieur de la planète, sauf dans une zone où les lignes d'équipotentiel décrivent une « bosse » comme schématisée très simplement sur la figure 2. Cette zone coïncide avec les traces en surface de l'impact d'un corps étranger sur la planète. Si l'on suppose que la bosse de potentiel est due à l'anomalie de masse provoquée par ce corps étranger, comment doit être la densité du corps étranger par rapport à la densité de la planète ρ_M en surface. On justifiera sa réponse à l'aide d'une démonstration (qui pourra être qualitative, i.e. sans équations).

Des mesures sismologiques réalisées à l'aide de capteurs disposés à la surface de P ont indiqué que l'intérieur de la planète est constitué de deux couches : une première couche au centre, le noyau, de rayon $r = R_N$, puis une deuxième, le manteau jusqu'en surface en $r = R_P$ (voir figure 1). La densité moyenne du manteau a pu être estimée à $\rho_M = 3500$ kg/m^3.

L'astrophysicien veut alors déduire des mesures gravimétriques **l'expression analytique du champ de gravité à l'intérieur et à l'extérieur de la planète ; il veut notamment déterminer la densité du noyau de la planète ρ_N.**

Il se souvient alors de son cours TUE302 et sait qu'il existe plusieurs méthodes pour calculer l'expression du champ de gravité générée par une distribution de masse.

b) Dans un premier temps, il essaie de calculer le champ $\vec{g}$ en un point M quelconque à l'extérieur de la planète en utilisant la méthode directe, par intégration volumique de la distribution de masse.

Écrire avec cette méthode la forme intégrale du champ de gravité au point M (voir figure 1) en précisant la signification physique de toutes les grandeurs utilisées dans l'intégrale. On ne vous demande pas de développer de calcul dans cette question.

L'astrophysicien abandonne finalement cette méthode qu'il juge trop difficile ; pouvez-vous expliquer pourquoi ?

Il préfère finalement utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ $\vec{g}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la planète P. Il veut utiliser la méthode suivante :

- Dans un premier temps, calculer le champ de gravité $\vec{g}$ généré par une boule de centre O, de rayon R_P et de densité ρ_M.
- Dans un second temps, calculer le champ de gravité $\vec{g}$ généré par une boule de centre O, de rayon R_N et de densité $\Delta\rho = \rho_N - \rho_M$.
- Appliquer ensuite le principe de superposition pour obtenir le champ total d'une planète à deux couches telle la planète P.

Dans la suite de l'exercice, on vous guide pour réaliser le calcul souhaité par l'astrophysicien.

c) Soit une boule de centre O, de rayon R_P et de densité de masse volumique uniforme ρ_M.

Calculez le champ de gravité $\overrightarrow{g}$ en un point M à l'extérieur de la boule. On explicitera toutes les notations utilisées en expliquant en particulier la méthode de calcul utilisée.

Calculez le champ de gravité $\overrightarrow{g}$ en un point M à l'intérieur de la boule.

d) Soit maintenant une boule de centre O, de rayon R_N et de densité de masse volumique uniforme $\Delta\rho = \rho_N - \rho_M$.

Calculez le champ de gravité $\overrightarrow{g}$ en un point M à l'extérieur et un autre point M à l'intérieur de la boule.

---

e) On considère maintenant la planète P de centre O et de rayon R_P, portant une densité de masse volumique ρ_N entre les rayons 0 et R_N (cf figure 1) et une densité de masse volumique ρ_M entre les rayons R_N et R_P. En vous aidant des deux questions précédentes et à l'aide du principe de superposition, calculez le champ $\overrightarrow{g}$ en tout point de l'espace, à l'intérieur et à l'extérieur de la planète.

On vous demande de retrouver en particulier que

$$\overrightarrow{g} = -\mathcal{G}\frac{M_N + M_M}{r^2}\overrightarrow{e}_r \text{ pour } r > R_P, \qquad (3)$$

où M_N et M_M sont respectivement la masse du noyau et la masse du manteau de la planète P.

---

f) Maintenant que vous avez déterminé l'expression souhaitée par l'astrophysicien (equation (4)) pour décrire le champ de gravité à l'extérieur de la planète, nous utilisons les données mesurées par le gravimètre embarqué à bord du satellite : la valeurs moyenne de la composante radiale du champ de gravité mesuré à $h = 300$ km est égale à 2.66 m/s^2. Sachant que R_P et R_N sont respectivement estimés à 3000 km et 1200 km, en déduire la densité moyenne du noyau à partir du modèle à deux couches obtenue en e). On donne $\mathcal{G} = 6.67\,10^{-11}$ S.I.

D'autres mesures ont été effectuées à h = 400 et 500 km et ont donné respectivement 2.51 et 2.37 m/s^2 également pour la moyenne de la composante radiale de $\overrightarrow{g}$. Ces dernières mesures confortent-elles le modèle à deux couches ?

Tracer qualitativement l'allure de $|\overrightarrow{g}|$ à l'intérieur et à l'extérieur de la planète P à partir des expressions obtenue en e). Pour le tracé de $|\overrightarrow{g}|$ entre $R_N < r < R_P$ il sera judicieux de calculer la valeur de $|\overrightarrow{g}|$ en $r = R_N$ et en $r = R_P$ afin de se donner des points d'ancrage.

Sur la figure 3, on a tracé le modèle moyen du champ de gravité terrestre pour l'intérieur de la Terre construit avec les observations. Comparez le champ de gravité de la planète P avec celui de la Terre ? Commentez.

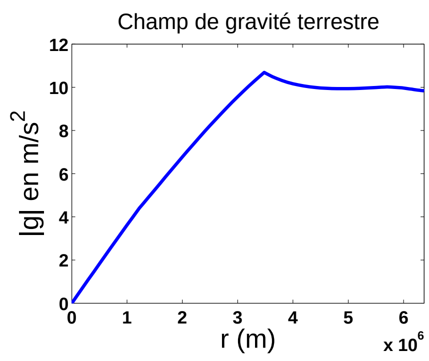

FIG. 3 – Champ de gravité terrestre en fonction du rayon.