Licence de Sciences de la Terre et de l'Univers - Année universitaire 2002/2003
Module L2 : Outils Physiques et Chimiques - *Champs et Chaleur*

Examen Partiel (1 heure) - 24 Octobre 2002 - 9 à 10 heures.

Calculatrice non autorisée. Le formulaire mathématique recto-verso distribué en cours est le seul document autorisé durant l'examen.

Exercice 1 - Question de cours.

1) Soit le champ vectoriel suivant en coordonnées cylindriques : $\vec{A} = A_0\vec{e}_\rho$.

a) Calculer le flux de ce champ vectoriel à travers un cylindre de rayon R et de hauteur H (alignée ave l'axe (Oz)).

b) Calculer div $\vec{A}$ et intégrer ensuite la divergence de $\vec{A}$ sur le volume délimité par le cylindre.

c) Retrouve-t-on le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\boxed{\iiint div\vec{A}dv = \oint\!\!\!\oint \vec{A}\cdot d\vec{s}}$$

d) Si $\vec{A}$ est un champ de vecteur vitesse, par exemple, sauriez-vous expliquer pourquoi la divergence de $\vec{A}$ ne vaut pas zéro.

2) On considère deux charges A (+q) et B (+2q) distantes de a. Dessiner la force qu'exerce A sur B et B sur A. Donner l'expression de chacune de ces forces en prenant soin de bien définir vos notations.

Exercice 2 - Perturbation du champ de gravité créé par une montagne.

Attention : de nombreuses questions peuvent se résoudre indépendamment les unes des autres.

On se propose de calculer la perturbation du champ de gravité lié à la présence d'une montagne en un point M près de la surface de la Terre.

Pour que les calculs soient les plus simples possibles, on va supposer que la Terre est plate (infinie) et que la montagne est une "boule" de rayon R posée à sa surface.

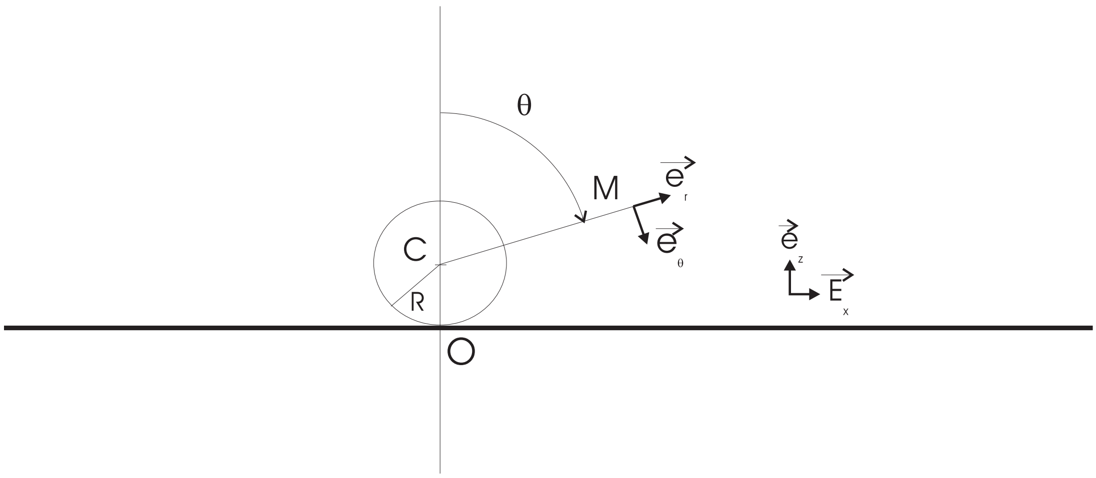

Fig. 4 – Schéma de l'exercice 2

1) On attache à la surface de la Terre (horizontale) un repère (O, x, y, z), avec Ox et Oy suivant la surface, et Oz suivant la verticale. Le champ de gravité sans la montagne $\vec{g}_0$ est supposé constant.

a) Dans quelle direction pointe $\vec{g}_0$, pourquoi ? En déduire l'expression de $\vec{g}_0$ à l'aide des vecteurs de la base (pas de calculs !). Combien vaut-il environ (à la surface terrestre) ? Rappeler les unités de $\vec{g}_0$.

On pose une boule de matière (représentant approximativement une montagne) sur la surface (Ox, Oy). Le point de contact est O, le centre de la boule C a pour coordonnées $(x = 0, y = 0, z = R)$, le rayon de cette boule est $R = 1000\ m$. On lui attache un repère en coordonnées sphériques $(C, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ (voir Figure). Le petit champ créé par cette boule est nommé $\vec{g}\,'$.

b) Quel principe nous permet de calculer le champs de gravité en séparant $\vec{g}_0$ et $\vec{g}\,'$?

2) En utilisant des arguments de symétrie, dans quelle direction pointe le vecteur $\vec{g}\,'$ et de quelles variables depend-il ? (On se placera dans le repère de la boule $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$). Faire un dessin en donnant un exemple de $\vec{g}_0$ et de $\vec{g}\,'$ au point M de la Figure.

3) La densité volumique de la boule de matière (la montagne) vaut $\rho = 3000$. Précisez les unités de ρ, calculer la masse totale M_M de la boule et donner sa valeur approximative (on prendra par exemple $\pi = 3$).

4) Nous considérons UNIQUEMENT dans cette question le champ créé par la boule. Nous

nous plaçons dans le repère $(C, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. Soit M un point à l'extérieur de la boule (voir Figure). Nous allons utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ de gravité à l'extérieur de cette boule.

Décrire la surface de Gauss que vous utilisez pour calculer $\vec{g}\ '$. Appliquez le théorème et en déduire $\vec{g}\ '(r)$.

5) Nous souhaitons maintenant passer dans le repère cartésien de la surface de la Terre pour pouvoir comparer le champ de gravité terrestre total au champ induit par la montagne. Nous nous plaçons dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ (qui est aussi le plan $(C, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ contenant M).

a) Écrire $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ en fonction de $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$ (l'expression dépend de θ, angle entre $\vec{e}_z$ $\vec{e}_r$). Vous pourrez entre autre vérifier vos projections en calculant le produit scalaire entre $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

b) Exprimer $CM = r$ en fonction de x_M et z_M (les coordonnées de M) dans la base cartésienne.

c) Remplacer r dans l'expression de $g'(r)$, puis exprimer le champ $\vec{g}\ '(r)$ dans la base cartésienne (ne pas oublier de remplacer les θ).

6) Application numérique : donner l'ordre de grandeur des composantes horizontale et verticale de $\vec{g}\ '$ au point $(x = 2000\ m, z = 0\ m)$. Comparer avec la valeur "connue" de g_0 ou encore de combien de pour cent la montagne fait varier le champ terrestre ?