Licence 3 - Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement - 2004/2005
Module L2 : Outils Physiques et Chimiques - *Champs et Chaleur*

Examen Final (1 heure et 45 minutes) - Jeudi 16 Décembre 2004 - 9 heures à 10h45.

Calculatrice autorisée. Le formulaire mathématique recto-verso distribué en cours est le seul document autorisé durant l'examen.

A titre indicatif, les exercices 1, 2 et 3 sont d'une longueur équivalente et seront notés approximativement sur le même nombre de points. Essayez donc de ne pas passer plus de 35 minutes par exercice si possible.

A noter que les questions sont pour la plupart indépendantes les unes des autres : si vous ne répondez pas à certaines questions dans un exercice, rien ne vous empêche de poursuivre.

N'oubliez pas de lire tout l'exercice avant de commencer à le traiter afin de vous faire une idée de l'objectif de l'exercice. Essayez d'être concis et précis dans vos réponses.

Exercice 1 - Questions de cours.

1) Donnez l'exemple de deux champs physique vectoriels ainsi que deux champs physique scalaires.

Expliquez qualitativement pourquoi le champ électrostatique n'est (ou n'est pas ?) à divergence nulle. Aidez vous d'une illustration.

2) Quelques lignes de champ magnétique sont représentées sur la figure 1. Quelle distribution simple de courants électriques vue en cours/TD peut donner naissance à de telles lignes de champ magnétique ? Redémontrer rapidement par la méthode de votre choix la formule reliant $\vec{B}$ et I dans le cas ce cette simple distribution de courants (figure 1).

Si l'intensité du champ magnétique de la figure 1 à une distance ρ=50 cm vaut 40 μT, quelle est l'intensité du courant circulant dans le fil électrique donnant naissance à ce champ magnétique ?

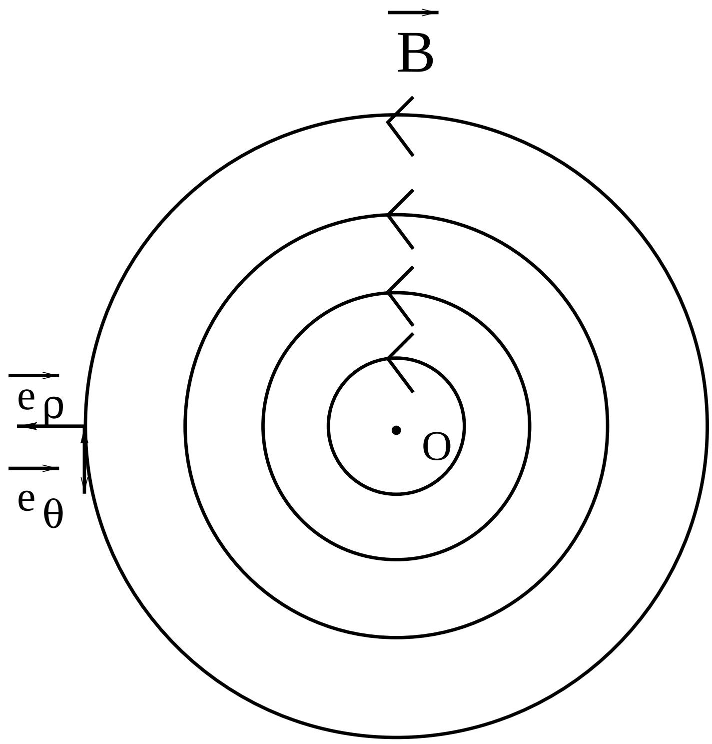

FIG. 1 – Lignes de champ magnétique $\vec{B}$ générées par la circulation d'un courant I dans un fil.

3) Calculez div$\vec{B}$ pour le champ magnétique de la figure 1 et vérifiez ensuite que la relation suivante est satisfaite, en considérant par exemple S comme étant la surface d'un cylindre de votre choix dont l'axe vertical serait l'axe (Oz) :

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\, \vec{B}\, \mathrm{d}V$$

Exercice 2 - Modèle thermique de la lune terrestre.

Soit l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \Delta T = \frac{A}{\rho C_p}$$

1) Quelle est la signification physique des différents termes de cette équation ? Quelles sont les unités de T, κ, A, ρ et C_p ? Comment peut-on réécrire κ en fonction de la conductivité thermique, de la densité et de la capacité calorifique ? Peut-on appliquer directement cette équation aussi bien aux différentes couches de la Terre (manteau, noyau) qu'à la lune terrestre ? Pourquoi ?

2) Considérons maintenant la lune terrestre de rayon a = 1738 km, de densité ρ= 3300 kg/m^3. Supposons que la lune est dans un **état thermique stationnaire** et qu'elle possède un taux moyen de quantité de production de chaleur par **unité de masse** qui vaut H = 7.38 10^{-12} W/kg^{-1}.
Quelle est la relation entre H et A ? Réécrivez l'équation ci-dessus en faisant intervenir maintenant H et non plus A.

3) Dans le cas la lune, comment peut-on simplifier cette équation si on suppose que la variation de température est purement **radiale** ? Démontrez alors que

$$T(r) = -\frac{\rho H}{6k} r^2 + \frac{C_1}{r} + C_2$$

est solution de cette équation, dans le cas où C_1 et C_2 sont deux constantes.

4) Quelle condition ou quel raisonnement utilise-t-on pour déterminer la valeur de C_1 ? En supposant que la température à la surface de la lune vaut $T_a = 250\ {}^oK$ et k=3.3 Wm^{-1}/^oK, quelle serait la température au centre de la lune ? Pourrait-on avoir, d'après ce modèle, un noyau liquide au centre de la lune ? Pourquoi ?

Combien vaut le flux de chaleur en surface avec ce modèle simple ? Les mesures d'Apollo 15 et 17 ont d'une part mesuré un flux de chaleur moyen en surface de l'ordre de q=18 mW/m^2 et d'autre part n'ont pas détecté la présence d'un noyau liquide avec les ondes sismiques....

5) On se propose alors de tester un autre modèle physique pour expliquer les mesures d'un tel flux de chaleur à la surface de la lune : on suppose que tous les éléments radioactifs (dans notre exercice, seules sources de chaleur) sont concentrés dans la croûte lunaire, épaisse de 60 km (en analogie avec la concentration d'isotopes radioactifs dans la croûte terrestre). Supposons par conséquent que la distribution en éléments radioactifs est la suivante : pour 0< r <b, H=0 et pour b< r <a H$\neq$ 0, avec b = 1678 km.

a) on suppose toujours le problème stationnaire en temps. Quelle est l'équation à résoudre cette fois pour 0< r <b ? Montrer que T(r) = constante est solution. Comment interprétez-vous cette solution ? Comment cette solution se traduit-elle en flux de chaleur au point $r = b$?

b) Résoudre alors la température et le flux de chaleur en fonction du rayon pour b< r <a.

c) Quelle devrait être alors la nouvelle valeur de H pour expliquer le flux de chaleur mesuré par Apollo ?

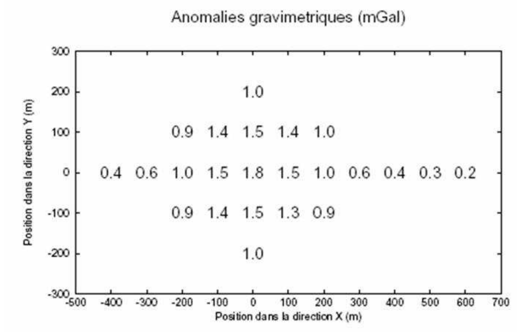

FIG. 2 – Anomalies de gravité (en mGal) en fonction de la position en surface (en mètres)

Exercice 3 - Anomalie de masse sphérique enfouie à une profondeur h.

1) A l'aide du théorème de Gauss, calculer le champ de gravité $\vec{g}$ à **l'extérieur** d'une sphère homogène de rayon R de densité ρ. On notera r la distance au centre de la sphère et on sera précis dans les notations du problème. Donner le résultat en fonction de G, ρ, R et r.

2) On cherche maintenant à trouver la signature en surface d'une anomalie de masse sphérique enfouie à une profondeur h au sein d'un milieu supposé homogène, la croûte terrestre. On suppose que la croûte a une densité ρ_c et que la sphère a pour densité ρ.

Démontrer alors que la **composante verticale (composante z) de l'anomalie gravimétrique** créée par cette masse en surface et à une **distance x à la verticale du centre de la sphère** vaut :

$$\Delta g(x) = \frac{4\pi}{3} G \Delta\rho \frac{hR^3}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

où $\Delta\rho = \rho - \rho_c$.

Retrouvez-vous le bon signe pour l'anomalie de gravité en surface lorsqu'on a un excès/déficit de masse ($\Delta\rho >$ ou < 0) ?

3) Au cours d'une campagne de mesure gravimétrique on a observé, toutes corrections faites (altitude et topographie) les anomalies indiquées en figure 2 (1 Gal = 10^{-2} m s^{-2}).

On cherche à déterminer **la forme géométrique** de la masse anormale et on veut tester en particulier si cette masse peut être sphérique.

a) Que pouvez vous dire concernant la distribution spatiale de l'anomalie de masse vue sur la figure 2, en particulier les symétries spatiales ?

b) Si cette anomalie est due à une sphère, comment devrait varier la fonction $\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta g(0)}$? En particulier, vous pourrez extraire la valeur de h en fonction de $\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta g(0)}$. En déduire que

$$h = x\Big[\Big(\frac{\Delta g(0)}{\Delta g(x)}\Big)^{\frac{2}{3}} - 1\Big]^{-(\frac{1}{2})}.$$

c) D'après la figure 2 et la formule donnant h, peut-on modéliser cette anomalie de gravité par une sphère de densité différente et si oui, à quelle hauteur h serait enfouie cette sphère ?