Licence 3 - Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement - 2003/2004
Module L2 : Outils Physiques et Chimiques - *Champs et Chaleur*

Examen Final (1 heure et 45 minutes) - Lundi 5 Janvier 2004 - 14 heures à 15h45.

Calculatrice autorisée. Le formulaire mathématique recto-verso distribué en cours est le seul document autorisé durant l'examen.

A titre indicatif, les exercices 1, 2 et 3 sont d'une longueur équivalente et seront notés approximativement sur le même nombre de points. Essayez donc de ne pas passer plus de 35 minutes par exercice si possible.

A noter que les questions sont pour la plupart indépendantes les unes des autres : si vous ne repondez pas à certaines questions dans un exercice, rien ne vous empêche de poursuivre.

Exercice 1 - Question de cours sur les distributions de courant électriques $\vec{J}$ et le champ magnétique induit $\vec{B}$.

1) On cherche à calculer le champ magnétique induit $\vec{B}$ par une distribution de courant électrique $\vec{J}$. Donnez les unités de $\vec{J}$. Quelles sont les règles de symétries concernant $\vec{J}$ qu'on utilise pour calculer le champ magnétique en un point M ?

2) Donnez les deux façons vues en cours de calculer le champ magnétique induit par la circulation d'un courant filiforme (dans un fil).

3) Utilisez la méthode que vous voulez pour calculer le champ magnétique induit par la circulation d'un courant I dans un fil infiniment long en un point M situé à une distance r du fil (voir figure 1).

4) Rappeler la relation de Maxwell qui relie le champ magnétique $\vec{B}$ à une distribution de densité de courant électrique $\vec{J}$. Utiliser cette relation pour donner les composantes de la densité de courant électrique $\vec{J}$ associées à un champ magnétique qui s'écrit de la façon suivante en coordonnées sphériques :

$$\vec{B} = \sin\theta \vec{e_r} + \sin\theta \vec{e_\phi}$$

.

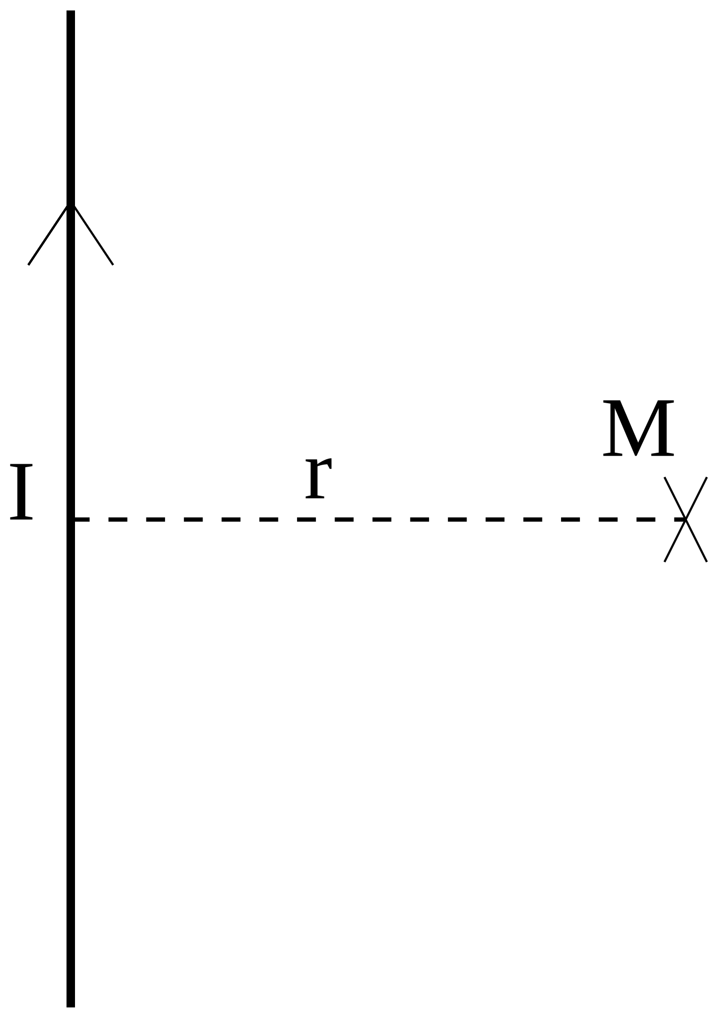

FIG. 1 – Fil infiniment long, de section infiniment petite, dans lequel circule un courant d'intensité I.

Exercice 2 - Problème de prospection gravimétrique : épave au fond d'un océan.

On veut tester l'efficacité de la prospection gravimétrique pour repérer certaines épaves qui reposent au fond des mers. Pour cela on dispose d'un gravimètre embarqué à bord d'un navire dont la précision est de 5 microgals. (1 microgal = 10^{-8}m/s^2).

Pour simplifier les calculs, on suppose que les épaves recherchées sont de formes cylindriques très allongées de longueur L, de rayon R et de masse volumique ρ_1=1420 kg/m^3, reposant sur le fond de la mer à la profondeur de h=125 m. La masse volumique de l'eau est de ρ_0=1020 kg/m^3. La figure 2 représente une vue simplifiée de côté du problème.

L'objet de l'exercice est de calculer dans un premier temps l'anomalie de gravité $\vec{\delta\gamma}$ générée par l'épave au niveau de la surface terrestre, puis de calculer l'influence de l'anomalie sur la gavité verticale locale $\vec{g}$.

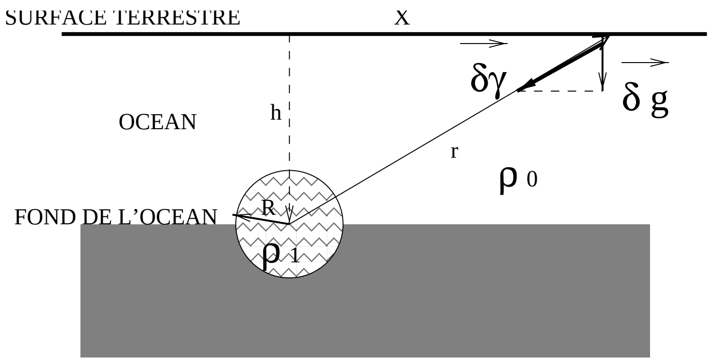

FIG. 2 – Vue de côté de l'épave cylindrique au fond de l'océan.

1) En considérant une épave dont la longueur L est très grande, montrer à l'aide d'arguments de symétries pourquoi l'anomalie de gravité $\vec{\delta\gamma}$ n'a qu'une composante dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, comme indiqué sur la figure 2.

2) Appliquer alors le théorème de Gauss pour calculer l'anomalie gravimétrique en surface au point M, avec X la distance entre la projection horizontale de l'axe et le point de mesure en surface. On note que le théorème de Gauss s'écrit dans notre cas :

$$\Phi = \int\int \vec{\delta\gamma} \cdot \vec{dS} = -4\pi G \Delta M_{int}$$

où ΔM_{int} est l'anomalie de masse liée à la présence de l'épave, dans notre cas cela correspond au surplus de masse puisque $\rho_1 > \rho_0$.
Pourquoi est-il adapté de prendre comme surface de Gauss un cylindre de rayon r dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe de l'épave ? Démontrer que l'on obtient au point M situé à une distance X (voir figure 2) :

$$\delta\gamma = \frac{2\pi G R^2 \Delta\rho}{\sqrt{h^2 + X^2}} = \frac{2\pi G R^2 (\rho_1 - \rho_0)}{\sqrt{h^2 + X^2}}$$

3) En déduire l'expression de la composante verticale $\delta\vec{g}$ de l'anomalie de gravité lié à la présence de l'épave en fonction de G,R,h,$\Delta\rho$ et X. Tracer qualitativement l'allure de $\delta\vec{g}$ quand on se dépace à la surface de la Terre (en faisant varier X). Comment varie qualitativement la courbe si on fait varier h ou R.

4) On se place en X=0. Exprimer $\delta\vec{g}(X = 0)$. En déduire la valeur numérique minimale de R pouvant être détectée avec le gravimètre embarqué à bord du navire.

Exercice 3 - Radioactivité naturelle en fonction de la profondeur.

Soit $A(z)$ un modèle de densité de chaleur interne libérée par la radioactivité naturelle donnée en fonction de la profondeur z par

$$\begin{aligned} A(z) &= A_0(1 - z/z_m) \text{ pour } z < z_m \\ A(z) &= 0 \text{ pour } z > z_m \end{aligned}$$

z la profondeur étant comptée positivement vers le bas. z_m désigne ici la profondeur de l'interface entre la croûte et le manteau.

On appelle k la conductivité thermique. Celle-ci est supposée constante. On appelle q_0 et T_0 le flux de chaleur et la température mesurés en surface. On se place en régime permanent (stationnaire). Dans cet exercice, on suppose que les grandeurs physiques ne varient qu'en fonction de z, pas en fonction de x ni de y.

1) Donner l'équation générale de la chaleur sans convection. Rappeler les unités des grandeurs utilisées.

Ecrire ensuite l'équation de la chaleur pour les deux domaines de profondeur de notre problème ($0 < z < z_m$ et $z > z_m$).

2) Rappeler l'expression générale du flux de chaleur et écrire l'expression de ce flux en fonction de la profondeur dans les deux domaines en fonction de constantes non encore déterminées.

3) Ecrire l'expression de la température en fonction de z pour les deux domaines. Quel type de conditions utilise-t-on pour déterminer les constantes ? En déduire les expressions complètes de T(Z) dans les deux domaines en fonction de A_0, k, z_m, q_0, T_0 et z.

4) Calculer le flux de chaleur provenant du manteau $q(z_m)$ pour les deux valeurs suivantes de z_m : 35 et 10 km. On prendra pour ce calcul $q_0 = 42\ mW/m^2$, $A_0 = 4\mu W/m^3$, $k = 2,5\ W/(m \cdot K)$.