Licence de Sciences de la Terre et de l'Univers - Année universitaire 2002/2003
Module L2 : Outils Physiques et Chimiques - *Champs et Chaleur*

Examen Final (1 heure et 45 minutes) - 19 Décembre 2002 - 10 heures à 11h45.

Calculatrice non autorisée. Le formulaire mathématique recto-verso distribué en cours est le seul document autorisé durant l'examen.

A titre indicatif, les exercices 1, 2 et 3 sont d'une longueur équivalente et seront notés sur le même nombre de points. Donc essayez de ne pas passer plus de 35 minutes par exercice si possible.

A noter que les questions sont pour la plupart indépendantes les unes des autres : si vous ne repondez pas à certaines questions dans un exercice, rien ne vous empêche de poursuivre.

Exercice 1 - Question de cours.

1) Rappeler la loi de Fourier donnant $\vec{q}$. Quelle est la dimension de $\vec{q}$. Rappeler l'équation de la chaleur, la signification des différents termes ainsi que leurs unités.

2) Rappeler l'expression du gradient d'un scalaire T(x,y,z) en coordonnées cartésiennes.
Considérons une plaque de métal d'un mètre par deux mètres. La mesure de la température en tout point de la plaque nous donne la loi :

$$T(x, y) = -2x + 4y \text{ (en Celsius)}$$

La conductivité thermique du métal vaut $k = 100\ Wm^{-1}K^{-1}$. Que vaut $\vec{q}$? Représenter quelques isothermes, ainsi que $\vec{q}$ (faire un dessin).

(On a négligé l'épaisseur de la plaque dans ce calcul.)

3) Un fil rectiligne suivant $\vec{e}_z$ est parcouru par un courant $I_0 = 1A$. Nous nous plaçons dans le repère $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Quelles sont les symétries du problème ?
En déduire la direction de $\vec{B}$ en tout point de l'espace. De quelles variables dépend-t-il ?
Appliquer le théorème d'Ampère pour exprimer le champ magnétique en tout point.

Faire une application numérique à 1 mètre du fil ($\mu_0 = 4\pi.10^{-7}SI$). L'intensité du champ terrestre étant de l'ordre de 0.5 $10^{-4}T$, que pensez-vous du champs induit par l'électricité urbaine ?

Exercice 2 - Problème d'Electrostatique - Quadripôle électrique linéaire

Rappel de cours

- L'expression du potentiel électrique pour une charge électrique ponctuel q varie en $1/r$ et s'écrit

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

.

- L'expression du potentiel électrique pour un dipôle électrique $(+q, -q)$ (voir figure 1) varie en $1/r^2$ et s'ecrit

$$V = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

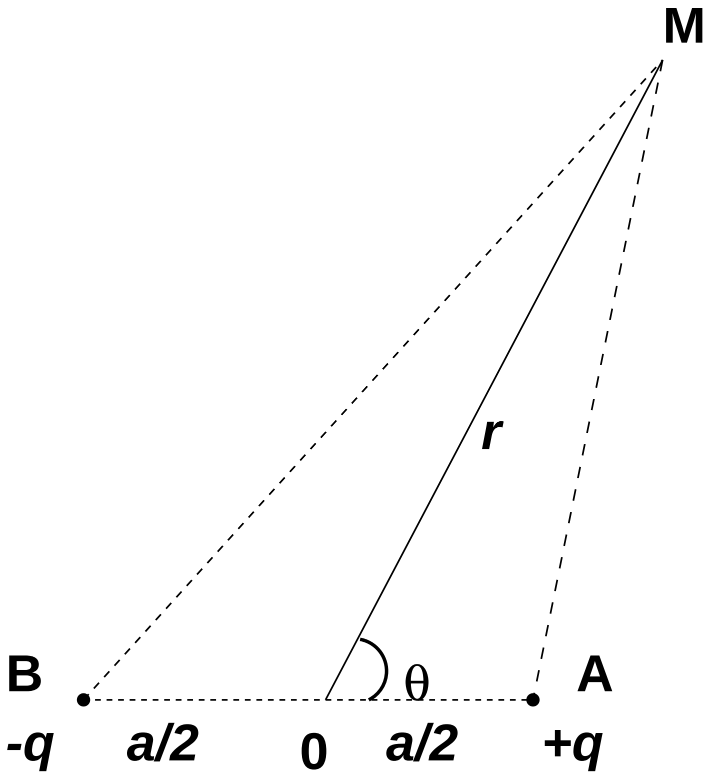

Fig. 1 – chéma d'un dipôle électrostatique

Il s'agit ici de démontrer que l'expression d'un quadripôle électrique $(+q, -2q, +q)$ varie en $1/r^3$. Un quadripôle linéaire est décrit et schématisé sur la figure 2. L'expression que l'on cherche à démontrer dans cet exercice est la suivante

$$V(M) = \frac{qa^2(3\cos^2\theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

1) Appliquer le principe de superposition (en utilisant la formule d'une charge ponctuelle) pour écrire l'expression générale du potentiel électrique au point M.

2) On utilise alors une relation valable quelque soit le triangle IJK :

$$i^2 = j^2 + k^2 - 2jk\cos\widehat{I}$$

où i, j et k sont les 3 longueurs des côtés du triangle et $\widehat{I}$ l'angle défini par les deux côtés j et k.
Exprimer ainsi le rapport $1/r_1$ en fonction de $r, a,$ et $\cos\theta$ et en faisant apparaître des termes $<< 1$.

3) On rappelle le développement limité au second ordre de l'expression

$$(1-\epsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \text{ où } \epsilon << 1.$$

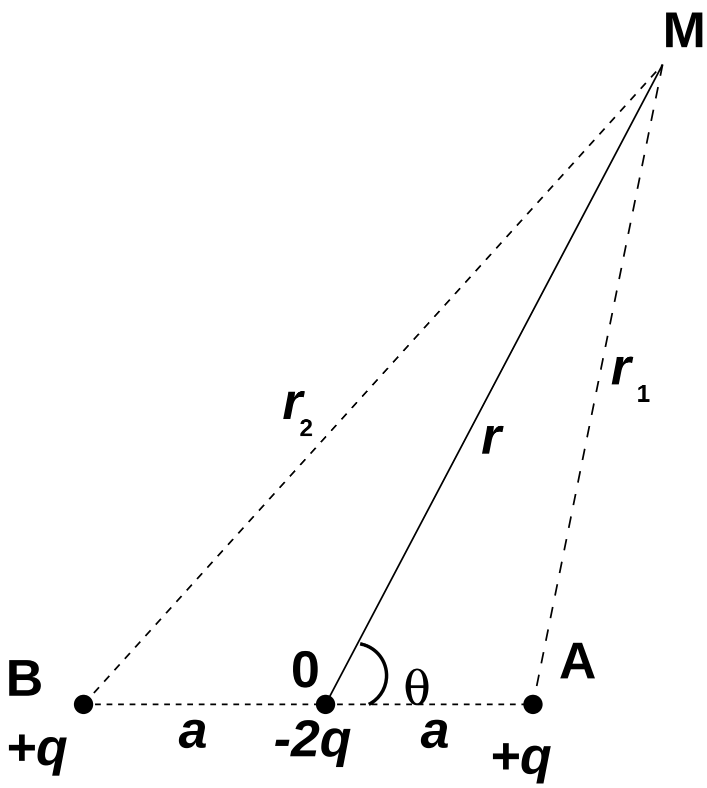

Fig. 2 – Schéma d'un quadripôle électrostatique : trois charges alignées, -2q en 0, +q en A(+a), +q en B(-a), et a est supposée très petit devant r.

Appliquer ce développement limité à l'expression de $1/r_1$ pour démontrer que $1/r_1$ peut s'écrire

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}[1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^2}(3\cos^2\theta - 1) + ...]$$

lorsqu'on considère que $a << r$.

4) Exprimer de la même façon le rapport $1/r_2$.

5) En utilisant les questions 1), 3) et 4), retrouver l'expression du potentiel electrostatique du quadripôle.

6) En déduire l'expression du champ électrostatique au point M.

Exercice 3 - Problème de Champ de Température -Bain Thermostaté

Un expérimentateur souhaite réaliser une expérience comme schématisée sur la figure 3 : deux sphères concentriques de rayons R1 et R2 sont respectivement maintenues aux températures T1 et T2. La temperature externe T2 est maintenue stable par le chauffage de la pièce dans laquelle le montage se situe. Un fluide, le gallium, est contenu entre les deux sphères ; la conductivité thermique du gallium vaut $k = 30\ Wm^{-1}K^{-1}$. L'expérimentateur veut refroidir la graine (T2>T1) à l'aide d'un bain thermostaté qui assure une circulation d'eau à la température souhaitée. La circulation d'eau à travers la graine se fait par l'intermédiaire de deux axes dont le rayon est négligeable devant le rayon de la graine comme schématisé sur la figure 3.

L'experimentateur veut atteindre un régime staionnaire où $T1 = 10°C$, $T2 = 60°C$ avec R1=5 cm et R2=25 cm.

Le but de cet exercice est d'aider l'experimentateur à dimensionner la puissance nécessaire du bain thermostaté pour qu'il refroidisse bien la graine à la température voulue et maintienne cette température constante : en effet, si le bain n'est pas assez puissant, l'eau du bain se rechauffera lorsqu'elle traversera le dispositif experimental plus chaud et n'arrivera pas à atteindre la température T1...

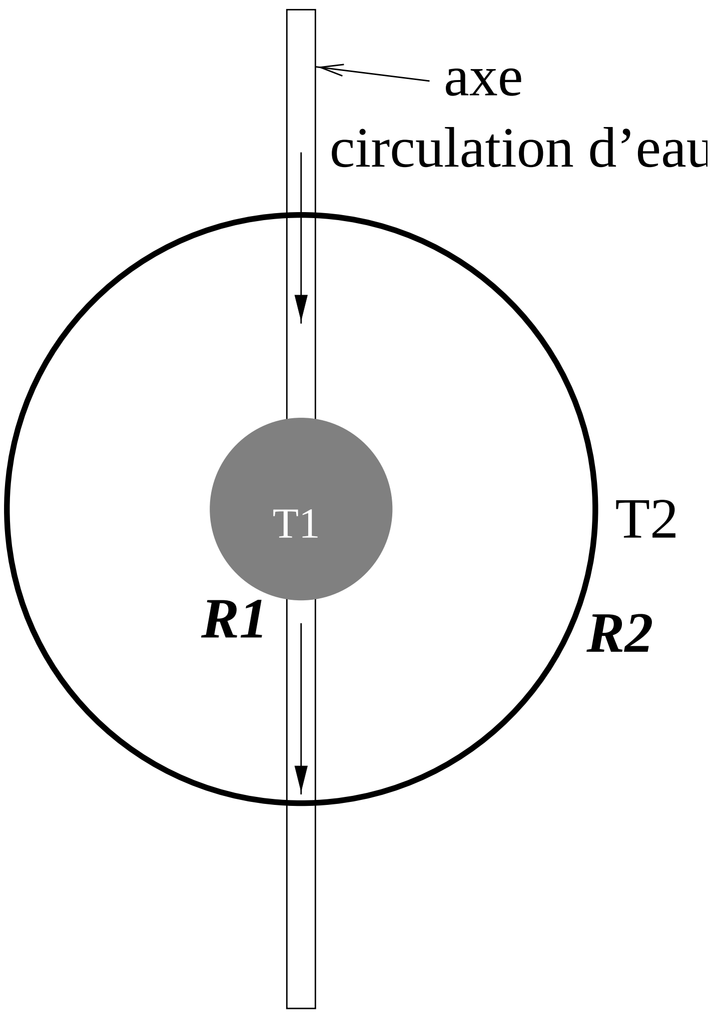

Fig. 3 – Sphères concentriques de rayons R1 et R2. La graine est à une température T1 et la sphère externe est à une température T2. La sphère externe est chauffé par un chauffage externe et la graine est refroidie par la circulation d'un bain thermostaté en temperature.

1) Commençons par supposer que T1 et T2 sont strictement constantes au cours du temps dans le dispositif expérimental. On cherche à calculer les isothermes dans le volume de la sphère. Pourquoi doit-on résoudre l'équation $\Delta T = 0$ dans ce cas ?

2) On suppose que le problème est à symétrie de révolution. Après avoir choisi le système de coordonnée adapté, de quelle variable doit dépendre le champ de température dans notre problème ?

Résoudre l'équation de température en cherchant une solution sous la forme

$$T(r) = \frac{T_a}{r} + T_b$$

où T_a et T_b sont deux constantes à determiner en fonction de T1, T2, R1 et R2.
A noter que l'on néglige dans ce calcul les deux axes verticaux dans lesquelles l'eau circule.

3) Quelle sont les allures des isothermes ? Dans quelle direction est évacuée la chaleur ?

4) Démontrer que le flux de chaleur à chaque rayon r intégré sur la surface de la sphère imaginaire de rayon r est constant quelque soit r avec $R1 < r < R2$. Pourquoi est-ce ainsi ?

5) *Application numérique :* Calculer la puissance du bain (Flux de chaleur multiplié par la surface, même calcul qu'à la question précedente) pour les valeurs de T1,T2,R1,R2,k données au début de l'énoncé.

Selon vous pourquoi obtient-on une puissance si faible ? Quelle est l'hypothèse dans notre calcul qui amène à obtenir une puissance si faible ? Pourquoi l'expérimentateur aurait-t-il interêt à se procurer un bain de bien plus forte puissance que celle que l'on a calculée ?