

Calculatrice autorisée. Le formulaire mathématique distribué en cours est le seul document autorisé durant l'examen.

1) Question de cours.

a) Champ de gravité.

Partons d'une Terre sphérique parfaitement homogène en densité. Les isopotentiels de gravité sont alors des sphères concentriques (voir figure 1). Quel est l'effet d'une anomalie de masse positive (excès de densité par rapport au volume environnant) sur une isopotentielle proche de la surface terrestre? Justifiez votre réponse (ou pourra rappeler par exemple la définition du potentiel de gravité).

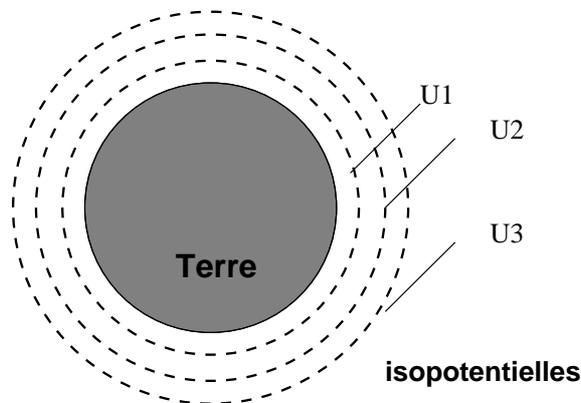


FIG. 1 – Potentiel de gravité pour une terre sphérique homogène. U_1 , U_2 et U_3 sont trois valeurs différentes du potentiel de gravité et les lignes popintillées sont des lignes isopotentielles.

b) Magnétostatique.

Considérons deux champs de vecteur en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\vec{J}_1 &= 2\rho z^2 \vec{e}_\rho + 4\rho^2 \tan \theta \vec{e}_\theta + 3\rho^4 \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{J}_2 &= \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho + 4\rho^2 z^3 \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Calculez la divergence de \vec{J}_1 et \vec{J}_2 .

Supposons maintenant que \vec{J}_1 et \vec{J}_2 sont des champs de vecteur *densité de courant électrique*. Quel champ de vecteur parmi \vec{J}_1 et \vec{J}_2 pourrait décrire une densité de courant en magnétostatique? Justifiez votre réponse en précisant le cas échéant la relation connue en magnétostatique qui vous permet de discriminer entre \vec{J}_1 et \vec{J}_2 .

c) Champ de température.

On suppose connu le gradient de température le long des premiers kilomètres de la croûte terrestre : $|\frac{\partial T}{\partial z}| \simeq 30^\circ C/km$. En supposant ce gradient de température constant à toutes les profondeurs de la Terre, quelle serait la température au centre de la Terre? Est-ce une hypothèse raisonnable?

On suppose maintenant que la distribution de production radiogénique en fonction de la profondeur z a la forme suivant : $A(z) = A_0 e^{-\frac{z}{d}}$ où d est l'échelle de longueur de décroissance de A avec la profondeur. A a pour unités W/m^3 .

On prend pour équation de la chaleur adaptée à notre problème la forme suivante :

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + A(z) = 0 \quad (1)$$

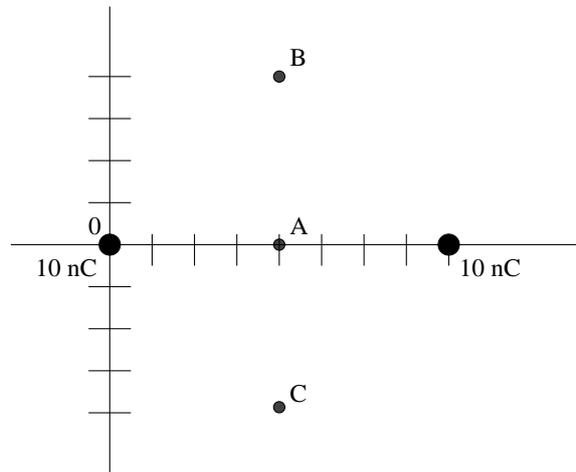
Quelles simplifications ont été faites pour écrire cette équation (par rapport à l'équation générale de la chaleur)? Précisez la définition ainsi que la signification de k . Quelles sont les unités de k ?

Résoudre l'équation 1. En déduire l'expression de la température en fonction de la profondeur z , celle-ci devant dépendre de A_0, d, k, q_r . On aura utilisé pour établir cette expression 1) $q(z \rightarrow \infty) = -q_r$ pour z tendant vers l'infini, où q_r est le flux de chaleur à la base de la lithosphère 2) $T(z = 0) = 0^\circ C$.

2) Champ électrostatique.

a) La figure montre deux charges ponctuelles chacune de 10 nC ($1\text{nC}=10^{-9}\text{C}$) distantes de 8 mètres dans l'air. Calculer le champ électrostatique aux points A, B , et C en justifiant les calculs ou les simplifications. N'oubliez pas de préciser les unités de E .

On précise que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9$



b) Un long fil métallique rectiligne, de longueur L , dans l'air, porte une charge positive et uniformément répartie Q (densité linéique de charge λ). Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrique en un point situé à une distance normale R de ce fil et loin de ses extrémités. Pour éviter les complications dues aux effets de bord on supposera que $L \gg R$. Il est vous est demandé d'expliciter au mieux vos calculs en précisant notamment le système de coordonnées choisi ainsi que les symétries utilisées.

3) Champ magnétique.

La ligne de tension d'un tramway se situe à une hauteur de 10 mètres au dessus du sol. Elle est rectiligne et transporte un courant de 100 A dans la direction de l'Est. Décrire la géométrie du champ magnétique qu'elle induit et calculer sa valeur sous la ligne au niveau du sol en précisant dans quelle direction pointe le champ magnétique à cet endroit. Comparez-le avec le champ magnétique terrestre sachant que le valeur moyenne du champ magnétique terrestre en surface est de $5 \cdot 10^{-5}$ T. *A.N.* : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$.

4) Bilans thermiques.

On s'intéresse dans cet exercice à la puissance dissipée par désintégration radioactives des éléments dans la croûte et dans le manteau. Pour cela on ne considère que les principaux éléments radioactifs : Uranium, Thorium et Potassium. Le tableau 3 donne la puissance par unité de masse relâchée par chaque élément radioactif dans la croûte continentale, la croûte océanique et le manteau.

a) Calculer les puissances totales en W délivrées par la croûte continentale, la croûte océanique et le manteau ($R_{Terre} = 6370$ km, croûte continentale = $2/5$ de la surface de la Terre). Que concluez-vous? (Il sera utile de donner des pourcentages pour les contributions).

	Croûte continentale	Croûte océanique	Manteau
Uranium	$1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Wkg}^{-1}$	$0,9 \cdot 10^{-10} \text{ Wkg}^{-1}$	$0,02 \cdot 10^{-10} \text{ Wkg}^{-1}$
Thorium	$1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Wkg}^{-1}$	$0,7 \cdot 10^{-10} \text{ Wkg}^{-1}$	$0,03 \cdot 10^{-10} \text{ Wkg}^{-1}$
Potassium	$0,7 \cdot 10^{-10} \text{ Wkg}^{-1}$	$0,1 \cdot 10^{-10} \text{ Wkg}^{-1}$	$0,007 \cdot 10^{-10} \text{ Wkg}^{-1}$
Densité	2,7	2,9	3,2
Épaisseur moyenne	30 km	10 km	2900 km

TAB. 3 – Puissance par unité de masse relâchée par chaque élément radioactif dans la croûte continentale, la croûte océanique et le manteau.

Continents	Flux de chaleur surfacique (mW/m^2)
Afrique	49.8
Amérique du sud	52.7
Amérique du nord	54.4
Australie	63.6
Eurasie	60.2
Océans	Flux de chaleur surfacique (mW/m^2)
Pacifique nord	95.4
Pacifique sud	77.4
Océan Indien	83.3
Atlantique nord	67.4
Atlantique sud	59.0
Bassins marginaux	71.1

TAB. 4 – Flux de chaleur à la surface de diverses régions du globe.

Le tableau 6 donne le flux de chaleur moyen en mW/m^2 mesuré à la surface de différentes régions du globe terrestre.

b) Calculer la valeur moyenne du flux de chaleur en surface pour les continents q_C et les océans q_O . Pourriez-vous expliquer pourquoi les valeurs moyennes sont différentes ?

c) A partir des flux de chaleur moyens calculés en b), déduire en fonction du rayon de la Terre les quantités de chaleur totales en W dégagés d'une part par les continents Q_C et d'autre part par les océans Q_O .

d) Comparer la puissance totale (W) dissipée à la surface de la Terre à celle radioactive dans la croûte et le manteau. Que pensez-vous du résultat ?