Licence 3 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, **Université Joseph-Fourier**

U.E. TUE 302, Outil Physique et Géophysique, 2006/2007

TD ⑨ Magnétostatique

Rappel de cours

La loi de Biot et Savart

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, q\, \overrightarrow{v} \wedge \frac{\overrightarrow{u}}{r^2}$$

où $\overrightarrow{B}(M)$ est le champ magnétique généré au point M situé à une distance r d'un porteur de charge q se déplaçant à une vitesse $\overrightarrow{v}$. $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire pointant de la charge vers le point M.

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2}$$

où $\overrightarrow{B}(M)$ est le champ magnétique généré au point M par un circuit $\mathcal{C}$ filiforme dans lequel circule un courant I. Pour obtenir le champ total $\overrightarrow{B}(M)$, il faut intégrer des petits éléments de circuit $\overrightarrow{dl}$ dans lesquels circule un courant I. $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire pointant de $\overrightarrow{dl}$ vers le point M.

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\overrightarrow{J} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2}\, dV$$

où $\overrightarrow{B}(M)$ est le champ magnétique généré au point M par une densité de courant $\overrightarrow{J}$ circulant dans un volume $\mathcal{V}$. Pour obtenir le champ total $\overrightarrow{B}(M)$, il faut intégrer des éléments de volume dV où sont contenus les vecteurs $\overrightarrow{J}$. $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire pointant de dV vers vers le point M. r est la distance entre M et le centre du volume dV.

Les règles de symétrie

On cherche à calculer le champ magnétique en un point M. Considérons un plan passant par M :

- **Si la distribution de courant $\overrightarrow{J}$ est symétrique** par rapport à ce plan, le champ magnétique résultant au point M sera **perpendiculaire au plan**.

- **Si la distribution de courant $\overrightarrow{J}$ est anti-symétrique** par rapport à ce plan, le champ magnétique résultant au point M sera **contenu dans le plan**.

Le théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_C \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I.$$

La circulation du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ le long d'une courbe fermée est égale à μ_0 fois le courant qui traverse la boucle.

Exercice 1 – Champ magnétique créé par un courant continu circulant dans un fil rectiligne

D'un point M on voit deux points P_1 et P_2 d'un conducteur rectiligne parcouru par un courant d'intensité I sous les angles θ_1 et θ_2 (voir figure 1). On désignera par x la distance de M à l'axe du conducteur.

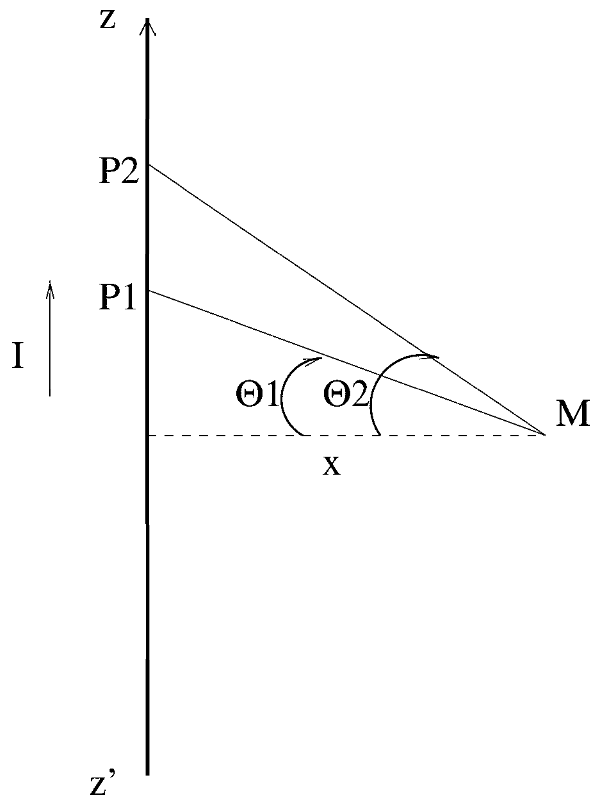

FIG. 1 – Fil parcouru par un courant I.

a) En utilisant la loi de Biot et Savart, définir en module et en direction le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé en M par le segment P_1P_2, longueur infinitésimal du conducteur situé sur l'axe $(z'z)$.

b) Déduire du résultat précédent le champ magnétique créé en M par un fil rectiligne infini parcouru par un courant I.

c) Calculer la circulation de $\overrightarrow{B}$ sur un cercle de rayon x ayant pour axe le courant et montrer que le théorème d'Ampère est bien vérifié.

Exercice 2 – Champ magnétique créé par des courants continus circulant dans des spires circulaires

Soit une spire de rayon a schématisée sur la figure 2 parcourue par un courant continu I. Soit M un point de son axe $z'z$.

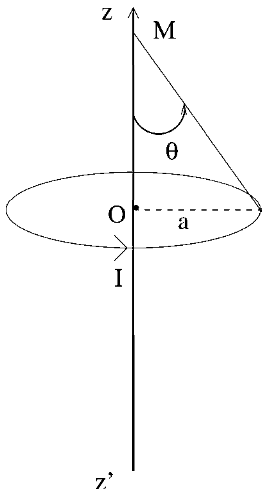

FIG. 2 – Spire de rayon a parcourue par un courant continu I.

a) Donner la direction et calculer les composantes du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$. (On pourra exprimer $\overrightarrow{B}$ en fonction de l'angle θ de la figure 2)

Obtenir au final une expression de $\overrightarrow{B}(M)$ en fonction de μ_0, I, a et z. (On utilisera dans ce calcul l'intégration directe, voir rappel de cours)

b) Soient maintenant deux spires identiques de rayon a schématisées sur la figure 3 , de centre respectif O_1 et O_2 sur leur axe commun $z'z$ dans lequel circule le courant I. On pose $O_1O_2 = 2d$; O est le milieu de O_1O_2.

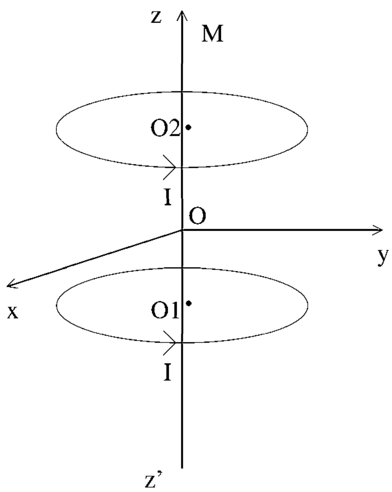

FIG. 3 – Deux spires identiques superposées de rayon a.

Calculer $\overrightarrow{B}$ en O à l'aide des réponses obtenues en a).

Le système décrit ci-dessus constitue une paire de « bobines de Helmholtz ». Dans ce système, on s'arrange pour que le champ magnétique sur l'axe, au voisinage de O, varie peu quand on se déplace sur cet axe. La relation qui vérifie ce montage « bobines de Helmholtz » est $a = 2d$.

Exercice 3 – Solénoïde mince torique

Un conducteur filiforme est bobiné sur le tore engendré par la rotation du cercle C (centre O', rayon a, voir la figure 4) autour de l'axe $z'z$ (c'est comme un fil que l'on enroulerait autour d'une bouée). Les N spires peuvent être assimilées à des spires circulaires de rayon a, pratiquement jointives. Le courant I qui circule dans le fil est constant.

On vous demande de déterminer la direction et l'expression de $\overrightarrow{B}$ en tout point M de l'espace dues à cette distribution de courant. On pourra commencer par déterminer la direction de $\overrightarrow{B}(M)$ en tout point de l'espace à l'aide des symétries, puis dans un second temps appliquer le théorème d'Ampère sur des contours judicieusement choisis. Il sera important de distinguer le calcul de $\overrightarrow{B}$ à l'intérieur du tore d'une part, et le calcul de $\overrightarrow{B}$ à l'extérieur du tore d'autre part.

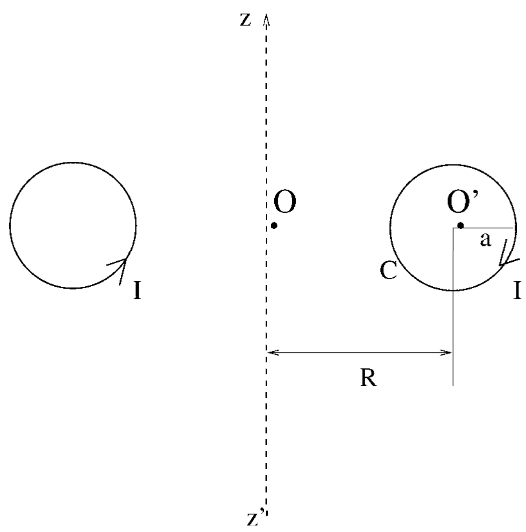

FIG. 4 – Coupe transversale d'un solénoïde mince torique

Exercice 4 – Solénoïde mince infiniment long

Un conducteur filiforme est bobiné sur un cylindre de rayon a à raison de N spires par mètre suivant $z'z$. Le courant I circulant dans le fil est constant.

Déterminer la direction et l'expression de $\overrightarrow{B}$ en tout point M de l'espace. On suivra la même démarche qu'à l'exercice précédent pour déterminer $\overrightarrow{B}$.