Licence 3 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 302, Outil Physique et Géophysique, 2006/2007

TD ⑧ Magnétostatique

Force de Laplace et force électrique sur des électrons libres

Rappel de cours

L'action d'un champ magnétique sur une particule chargée en mouvement se caractérise par une force $\overrightarrow{f}$, la force de Laplace.

Une charge q (unités C) ayant une vitesse $\overrightarrow{v}$ (unités m / s) soumise à un champ $\overrightarrow{B}$ $\Big($unités T = kg / (s^{2}A) $\Big)$ ressent la force

$$\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}. \left(\text{ unités N = C m / s kg / (s}^2\text{A)}\right)$$

$\rightarrow$ Si $\overrightarrow{v}$ est parallèle à $\overrightarrow{B}$ la force s'appliquant sur la particule est nulle. Elle est maximale pour un v et un B donnés si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{B}$ sont perpendiculaires.

L'intensité du courant électrique à travers une surface est, par définition, le débit de charge à travers cette surface :

$$I = \frac{dQ}{dt} \text{ (unités A = C / s).}$$

Dans un conducteur comportant n porteurs de charge par unité de volume animés d'une vitesse d'ensemble $\langle\overrightarrow{v}\rangle = \overrightarrow{V}$, on peut définir le vecteur densité de courant :

$$\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{V} = \rho\overrightarrow{V} \text{ (unités A / m}^2\text{= 1/ m}^3\text{ C m / s = C / m}^3\text{ m /s)}$$

où ρ est la densité volumique de charge (unités C / m^3).

Le flux de $\overrightarrow{j}$ à travers une surface $\mathcal{S}$ donne l'intensité traversant $\mathcal{S}$:

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS}$$

Soit maintenant une particule chargée en mouvement au sein d'un champ électrique et d'un champ magnétique ; elle est soumise à la force totale :

$$\overrightarrow{f} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}).$$

Exercice 1 – Effet Hall

Un ruban de cuivre de l=1.5 cm de large et de h=1.25 mm d'épaisseur est placé perpendiculairement à un champ magnétique dont l'intensité vaut 1.75 T. Le ruban est parcouru dans sa longueur par un courant continu I dont l'intensité est 100 A. La direction et le sens de la vitesse des électrons (vitesse $\overrightarrow{v}$), ainsi que le sens du champ magnétique imposé sont indiqués sur la figure 1. A noter que d'après la convention utilisée en cours et dans le rappel de cours ci-dessus, le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$ est dans le sens $+\overrightarrow{e}_x$.

a) Donner l'expression de la force de Laplace exercée sur chaque électron en fonction de sa charge et de sa vitesse.

b) écrire le vecteur densité de courant dans le cadre de l'exercice. On utilisera pour cela la définition du vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$. A noter que la densité volumique de charge en C/m^3

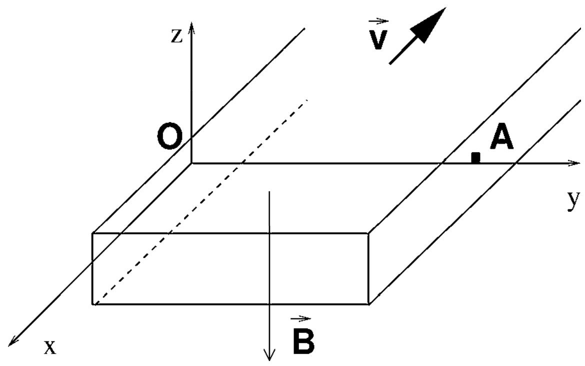

FIG. 1 – Ruban de cuivre parcouru par un courant I.

s'écrit dans notre cas $\rho = -n\ e$ où n est le nombre d'électrons par unité de volume (unités (nombre d'electrons) / m^3) et $-e$ est la charge d'un électron en Coulomb.

En écrivant la relation entre I et $\overrightarrow{j}$, en déduire la vitesse de déplacement des électrons en fonction de I, de la section droite du ruban $S = h\,l$, du nombre d'électrons libres par unité de volume n, et de la charge élémentaire e.

c) Dans cette question, on traite la situation transitoire très brève qui prend place juste au moment où l'on plonge le ruban de cuivre au sein du champ magnétique $\overrightarrow{B}$.

La force de Laplace agit alors sur les électrons en mouvement : les électrons vont s'accumuler sur une des faces latérales du ruban. Laquelle ?

Suite à cette accumulations de charges négatives sur une des faces, le ruban de cuivre étant globalement neutre du point de vue de la densité électrique de charges, un déficit de charges négatives (qui est équivalent à un excès charges positives) apparaîtra sur la face opposée à celle où se sont accumulés les electrons. Il apparaît alors un champ électrique entre les deux faces, le champ « Hall » $\overrightarrow{E}_H$, résultant de la distribution dissymétrique de charges entre les deux faces.

Dans quel sens pointe $\overrightarrow{E}_H$? (Pour répondre à cette dernière question, on pourra raisonner avec une charge ponctuelle positive sur une des faces et une charge négative sur la face opposée.)

d) Un régime d'équilibre apparaît quand les forces de Laplace et les forces électriques s'équilibrent. Écrire cette condition d'équilibre. Vérifier le sens des forces. En déduire une relation entre le champ électrique, le champ magnétique et la vitesse de déplacement des électrons.

e) En utilisant entre autres les relations obtenues en b) et d), en déduire que la différence de potentiel entre les points O et A (voir figure 1) s'écrit

$$\Delta V = V(O) - V(A) = \left(\frac{1}{ne}\right)\frac{IB}{h}.$$

En déduire la valeur de ΔV en μ V.

A.N. : Masse volumique du cuivre = 8800 kg m^{-3}, masse molaire du cuivre = 63.6 g mol^{-1}, nombre d'Avogadro = 6.02 10^{23} atomes mole^{-1}. On suppose que chaque atome de cuivre possède un électron libre.

L'effet Hall est utilisé en particulier pour étudier les propriétés de conduction de semi-conducteurs. L'effet Hall est aussi le phénomène physique à la base des sondes à « effet Hall » qui mesurent le champ magnétique.

Moment de la force de Laplace sur une spire de Courant

Complément du cours

Lorsque l'on a un vecteur densité de courant $\vec{j}$ et un champ magnétique environnant $\vec{B}$, la force de Laplace appliquée à un volume infinitésimal dV au sein duquel circule le courant $\vec{j}$ s'écrit :

$$\vec{df} = \vec{j} \wedge \vec{B} dV.$$

Lorsque l'on est en présence de fils parcourus par des courants, on peut transformer l'expression de cette force pour l'écrire à l'aide de l'intensité parcourant le fil. Pour cela on utilise la relation entre I et $\vec{j}$:

$$I\vec{dl} = \left(\iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} \right) \vec{dl} = j\, S\ \vec{dl} = \vec{j}\ dS\, dl = \vec{j}\, dV$$

où $dV = S\, dl$ avec S la surface de la section du fil et $\vec{dl}$ un petit élément de longueur du fil.

De cela on déduit que la force qui s'exerce sur une portion de fil conducteur $\vec{dl}$ est

$$\vec{df} = I\vec{dl} \wedge \vec{B}.$$

On peut aussi exprimer le moment dû à la force de Laplace $\vec{d\Gamma}_O$ subie par l'élément de fil :

$$\vec{d\Gamma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{df}$$

où M est le point milieu de l'élément infinitésimal $\vec{dl}$, et O le point par rapport auquel on veut calculer le moment. Cette dernière expression concerne une portion de circuit $\vec{dl}$; il faut ensuite intégrer sur toute la longueur pour obtenir le moment total s'appliquant sur un circuit complet.

Exercice 2 – Moment magnétique d'une spire.

Soit une spire circulaire rigide de rayon R (figure 2) parcourue par un courant continu I et baignant dans un champ magnétique constant $\vec{B}$.

a) Calculer la force de Laplace totale exercée sur la spire en intégrant la force sur chaque petit élément $\vec{dl}$. Montrer que la force totale est nulle.

On veut démontrer dans la suite de l'exercice que bien que la force totale est nulle, le circuit subit un couple dû aux forces de Laplace destiné à le positionner préférentiellement par rapport à la direction du champ magnétique.

b) On vous demande de calculer le moment des forces de Laplace au point O centre de la spire.

$$\vec{\Gamma}_O = \oint_C \overrightarrow{OM} \wedge (I\vec{dl} \wedge \vec{B}).$$

Pour cela, on décomposera d'abord le vecteur $\vec{B}$ entre le vecteur normal à la surface de la spire $\vec{B}_n$ et le vecteur tangent $\vec{B}_t$ et on montrera au préalable que $\vec{\Gamma}_O$ se réduit à la contribution

$$\vec{\Gamma}_O = \int_C \overrightarrow{OM} \wedge (I\vec{dl} \wedge \vec{B}_t).$$

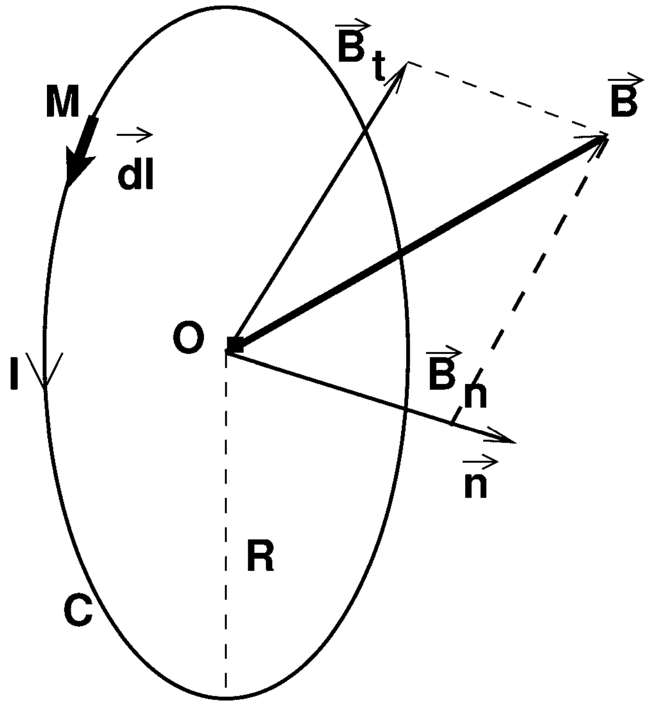

FIG. 2 – Spire soumise à un champ magnétique.

On calculera ensuite $\vec{\Gamma}_O$ en combinant les systèmes de coordonnées polaires et cartésiens en choisissant (Ox) (l'axe définissant $\theta = 0$) aligné avec $\vec{B}_t$.

On démontrera que

$$\vec{\Gamma}_O = \pi R^2 I B_t \vec{e}_y.$$

c) Par définition, le moment magnétique du circuit s'écrit dans notre problème :

$$\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I \vec{n},$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal au plan contenant la spire de courant.

Montrer que plus généralement

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}.$$

Quel est l'effet du champ magnétique (via les forces de Laplace) sur le circuit ?