# Licence 3 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

## U.E. TUE 302, Outil Physique et Géophysique, 2006/2007

# TD ⑦ Prospection gravimétrique

---

## Exercice 1 - Perturbation du champ de gravité créée par une montagne

On se propose de calculer la perturbation du champ de gravité liée à la présence d'une montagne. On calculera cette perturbation en un point $M$ près de la surface terrestre.

Pour que les calculs soient les plus simples possibles, on va supposer que la Terre est plate (infinie) et que la montagne est une « boule » de rayon $R$ posée à sa surface.

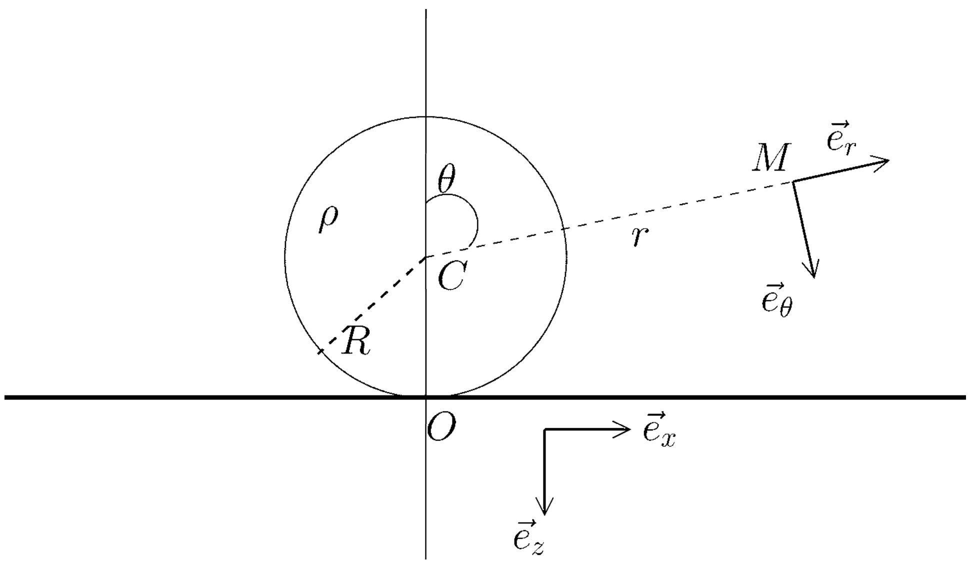


FIG. 1 – Schématisation de la montagne sous la forme d'une boule.

**1)** On attache à la surface de la Terre (horizontale) un repère $(O, x, y, z)$, avec $Ox$ et $Oy$ suivant la surface, et $Oz$ suivant la verticale vers le bas. Le champ de gravité sans la montagne $\overrightarrow{g}_0$ est supposé constant.

**a)** Dans quelle direction pointe $\overrightarrow{g}_0$, pourquoi ? En déduire l'expression de $\overrightarrow{g}_0$ à l'aide des vecteurs de la base (pas de calculs !). Combien vaut-il environ (à la surface terrestre) ? Rappeler les unités de $\overrightarrow{g}_0$.

On pose une boule de matière (représentant approximativement une montagne) sur la surface $(Ox, Oy)$. Le point de contact est $O$, le centre de la boule $C$ a pour coordonnées $(x = 0, y = 0, z = -R)$, le rayon de cette boule est 1000 m. On lui attache un repère en coordonnées sphériques $(C, \overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_\phi)$ (voir figure 1). Le petit champ créé par cette boule est nommé $\overrightarrow{g}'$.

**b)** Quel principe nous permet de calculer le champ de gravité en séparant $\overrightarrow{g}_0$ et $\overrightarrow{g}'$ ?

**2)** En utilisant des arguments de symétrie, répondez à la question suivante : dans quelle direction pointe le vecteur $\overrightarrow{g}'$ et de quelles variables depend-il ? (On se placera dans le repère de la boule

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$). Faire un dessin en donnant un exemple de $\vec{g}_0$ et de $\vec{g}'$ au point $M$.

**3)** La densité volumique de la boule de matière (la montagne) vaut $\rho = 3000$. Précisez les unités de $\rho$, calculer la masse totale $M_M$ de la boule.

**4)** Nous considérons dans cette question UNIQUEMENT le champ créé par la boule. Nous nous plaçons dans le repère $(C, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. Soit $M$ un point à l'extérieur de la boule (voir figure 1). Nous allons utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ de gravité à l'extérieur de cette boule.

Décrire la surface de Gauss que vous utilisez pour calculer $\vec{g}'$. Appliquez le théorème et en déduire $\vec{g}'(r)$.

**5)** Nous souhaitons maintenant passer dans le repère cartésien de la surface de la Terre pour pouvoir comparer le champ de gravité terrestre total au champ induit par la montagne. Nous nous plaçons dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ (qui est aussi le plan $(C, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ contenant M).

**a)** Écrire $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ en fonction de $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$ (l'expression dépend de $\theta$, angle entre $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_r$). Vous pourrez entre autre vérifier vos projections en calculant le produit scalaire entre $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

**b)** Exprimer $CM = r$ en fonction de $x_M$ et $z_M$ (les coordonnées de $M$) dans la base cartésienne.

**c)** Remplacer $r$ dans l'expression de $g'(r)$, puis exprimer le champ $\vec{g}'(r)$ dans la base cartésienne (ne pas oublier de remplacer les termes avec la variable $\theta$).

**6)** Application numérique : donner l'ordre de grandeur des composantes horizontale et verticale de $\vec{g}'$ au point ($x = 2000$ m, $z = 0$ m). Comparer avec la valeur « connue » de $g_0$. De combien de pour cent la montagne fait varier le champ de gravité terrestre ?

## Exercice 2 - Problème de prospection gravimétrique : épave au fond d'un océan

On veut tester l'efficacité de la prospection gravimétrique pour repérer certaines épaves qui reposent au fond des mers. Pour cela on dispose d'un gravimètre embarqué à bord d'un navire dont la précision est de 5 microgals (1 microgal = $10^{-8}$m/s$^2$).

Pour simplifier les calculs, on suppose que l'épave recherchée est de forme cylindrique très allongée de longueur $L$, de rayon $R$ (telle que $L/R \gg 1$) et de masse volumique $\rho_1$=1420 kg/m$^3$. Elle repose sur le fond de la mer à la profondeur de $h$=125 m. La masse volumique de l'eau est de $\rho_0$=1020 kg/m$^3$. La figure 2 représente une vue de côté simplifiée du problème. On prend comme convention $\vec{e}_z$ dirigé vers le bas.

L'objet de l'exercice est de calculer dans un premier temps l'anomalie de gravité $\overrightarrow{\delta\gamma}$ générée par l'épave au niveau de la surface terrestre, puis de calculer l'influence de l'anomalie sur la gravité verticale locale $\vec{g}$.

**a)** En considérant une épave dont la longueur $L$ est très grande (devant $R$), montrer à l'aide d'arguments de symétries pourquoi l'anomalie de gravité $\overrightarrow{\delta\gamma}$ n'a qu'une seule composante dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, comme indiqué sur la figure 2.

**b)** Appliquer alors le théorème de Gauss pour calculer l'anomalie gravimétrique en surface au point $M$, avec $X$ la distance entre la projection à la surface de l'océan du centre de l'épave et le point de mesure en surface. On note que le théorème de Gauss s'écrit dans notre cas :

$$\Phi = \iint \overrightarrow{\delta\gamma} \cdot \overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}\Delta M_{\text{int}}$$

où $\Delta M_{\text{int}}$ est l'anomalie de masse liée à la présence de l'épave, dans notre cas cela correspond au surplus de masse puisque $\rho_1 > \rho_0$.

Pourquoi est-il adapté de prendre comme surface de Gauss un cylindre de rayon $r$ dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe de l'épave ? Démontrer que la composante radiale du champ de gravité induit par l'épave s'écrit au point $M$ situé à une distance $X$ (voir figure 2) :

$$\delta\gamma(X) = -\frac{2\pi\mathcal{G}R^2\Delta\rho}{\sqrt{h^2+X^2}} = -\frac{2\pi\mathcal{G}R^2(\rho_1-\rho_0)}{\sqrt{h^2+X^2}}$$

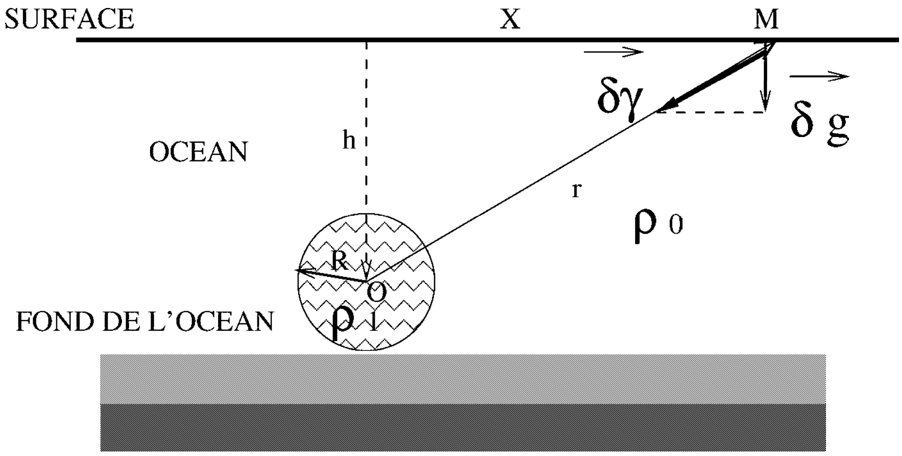


FIG. 2 – Vue de côté de l'épave cylindrique au fond de l'océan.

**c)** En déduire l'expression de la composante verticale $\overrightarrow{\delta g}$ de l'anomalie de gravité liée à la présence de l'épave en fonction de $\mathcal{G}$, $R$, $h$, $\Delta\rho$ et $X$. Tracer qualitativement l'allure de $\overrightarrow{\delta g}$ quand on se déplace à la surface de la Terre (en faisant varier $X$). Comment varie qualitativement la courbe si on fait varier $h$ ou $R$ ?

**d)** On se place en $X = 0$. Exprimer $\overrightarrow{\delta g}(X = 0)$. En déduire la valeur minimale de R pouvant être détectée avec le gravimètre embarqué à bord du navire.

## Exercice 3 - Anomalie de masse sphérique enfouie à une profondeur $h$

**1)** A l'aide du théorème de Gauss, calculer le champ de gravité $\overrightarrow{g}$ à l'extérieur d'une sphère homogène de rayon R de densité $\rho$. On notera $r$ la distance au centre de la sphère et on sera précis dans les notations du problème. Donner le résultat en fonction de $\mathcal{G}$, $\rho$, $R$ et $r$.

**2)** On cherche maintenant à trouver la signature en surface d'une anomalie de masse sphérique enfouie à une profondeur $h$ au sein d'un milieu supposé homogène, la croûte terrestre. On suppose que la croûte a une densité $\rho_c$ et que la sphère a pour densité $\rho$.

Démontrer alors que la composante verticale (composante $z$, $\overrightarrow{e}_z$ dirigé vers le bas) de l'anomalie gravimétrique créée par cette masse en surface ($z = 0$), à une distance $x$ de l'intersection entre l'axe vertical passant par le centre de la sphère et la surface terrestre vaut :

$$\Delta g(x) = \frac{4\pi}{3}\mathcal{G}\Delta\rho\frac{hR^3}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

où $\Delta\rho = \rho - \rho_c$.

Retrouvez-vous le bon signe pour l'anomalie de gravité en surface lorsqu'on a un excès/déficit de masse ($\Delta\rho >$ ou $< 0$) ?

**3)** Au cours d'une campagne de mesure gravimétrique on a observé, toutes corrections faites (altitude et topographie) les anomalies indiquées en figure 3 (1 Gal = $10^{-2}$ m s$^{-2}$).

On cherche à déterminer la forme géométrique de la masse anormale et on veut tester en particulier si cette masse peut être sphérique ou non.

**a)** Que pouvez vous dire concernant la distribution spatiale de l'anomalie de masse vue sur la figure 3, en particulier les symétries spatiales ?

**b)** Si cette anomalie est due à une sphère, comment devrait varier la fonction $\frac{\Delta g(x)}{\Delta g(0)}$ ? En particulier, vous pourrez extraire la valeur de $h$ en fonction de $\frac{\Delta g(x)}{\Delta g(0)}$. En déduire que

$$h = x\left[\left(\frac{\Delta g(0)}{\Delta g(x)}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

**c)** D'après la figure 3 et la formule donnant $h$, peut-on modéliser cette anomalie de gravité par une sphère de densité différente et si oui, à quelle hauteur $h$ serait enfouie cette sphère ?

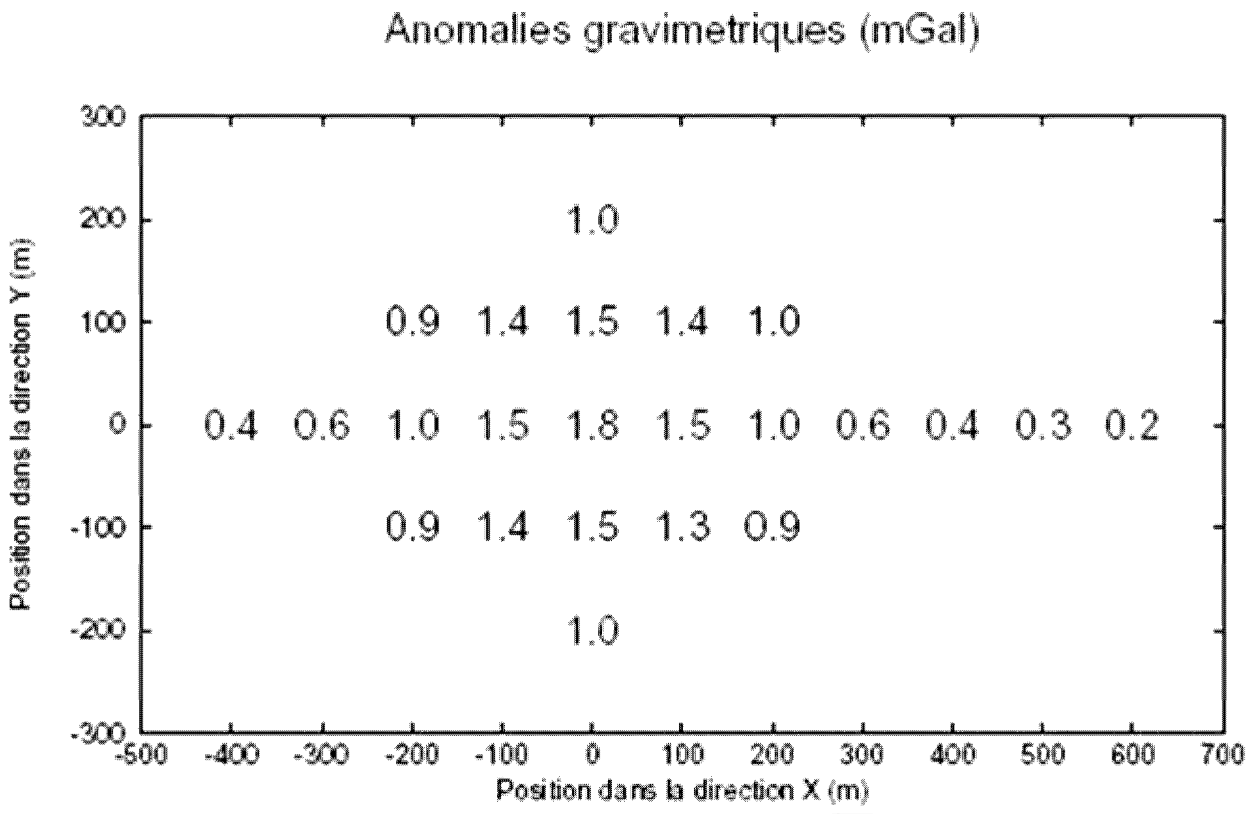


FIG. 3 – Anomalies de gravité (en mGal) en fonction de la position en surface (en mètres)