Licence 3 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 302, Outil Physique et Géophysique, 2006/2007

TD ⑥ Champ de gravité et potentiel terrestre

Champ de gravité $\overrightarrow{g}$

Rappel de cours

Un corps de masse m crée un **champ gravitationnel** $\overrightarrow{g}$ dans tout l'espace. Au point M situé à une distance r donnée de cette masse, le champ vaut

$$\overrightarrow{g} = -\mathcal{G}\frac{m}{r^2}\overrightarrow{u}.$$

$\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire allant de m vers le point M, $\mathcal{G}$ est la constante de Cavendish $\mathcal{G} = 6.67\ 10^{-11}$ S.I. Le champ vectoriel $\overrightarrow{g}$ est par conséquent toujours attractif, il pointe vers le corps donnant naissance à ce champ.

Soit un second corps de masse m' soumis au champ $\overrightarrow{g}$. La masse m' ressent alors une force de gravité :

$$\overrightarrow{F}_{m/m'} = \overrightarrow{F}_{\overrightarrow{g}} = m'\overrightarrow{g} = -\mathcal{G}\frac{mm'}{r^2}\overrightarrow{u}_{m\to m'}$$

Le **potentiel de gravité** U est relié au gradient du champ gravitationnel $\overrightarrow{g}$ par :

$$\boxed{\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}U}$$

Pour un corps de masse m, on en déduit l'expression du potentiel à une distance r donnée de cette masse :

$$\boxed{U = -\mathcal{G}\frac{m}{r} + K}$$

où K est une constante restant à déterminer avec les conditions aux limites du problème.

Afin de calculer le champ de gravité $\overrightarrow{g}$, on peut utiliser l'équivalent du **théorème de Gauss** vu en électrostatique mais appliqué cette fois à la gravité :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}\iiint_{\mathcal{V}}\rho d\tau = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}$$

On intègre sur une surface de Gauss fermée $\mathcal{S}$ et l'intégrale de volume est étendue au volume $\mathcal{V}$ limité par la surface fermée $\mathcal{S}$.

On appelle **énergie potentielle** d'un corps de masse m :

$$E_p(M) = mU(M)$$

Par convention, on se fixe $E_p = 0$ lorsque $r \to \infty$

Le travail des forces de gravité est égal à l'opposé de la variation d'énergie potentielle

$$W_{\overrightarrow{F}_{\overrightarrow{g}}} = \int_L m\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{dl} = -\Delta E_p$$

Exercice 1 - Champ de gravité terrestre.

On suppose une Terre parfaitement sphérique de rayon R = 6371 km avec une masse uniformément distribuée en volume (Terre homogène), avec une densité volumique de masse ρ ($[\rho]$=kg/m^3).

a) Quelle est la direction du champ de gravité $\overrightarrow{g}$ en un point M situé à une distance r du centre de la Terre ? De quelle(s) variable(s) dépend le champ $\overrightarrow{g}$ lorsqu'on choisit un système de coordonnées sphériques ?

b) Calculer l'expression du champ gravité $\overrightarrow{g}$ à l'extérieur et à l'intérieur de la Terre en utilisant le théorème de Gauss. Il sera utile d'exprimer $\overrightarrow{g}$ à l'extérieur et à l'intérieur de la Terre en fonction de la masse totale de la Terre. Représenter qualitativement la fonction $\mid \overrightarrow{g} \mid$ en fonction du rayon r.

c) Connaissant le rayon de la Terre, R = 6371 km, à quelle altitude faut-il s'élever pour que $\mid \overrightarrow{g} \mid$ soit inférieure de 1 % à l'accélération mesurée à la surface terrestre ?

Combien vaut cette accélération à une profondeur de 10 km ?

A.N. : On donne la masse volumique moyenne de la Terre $\overline{\rho}$ = 5500 kg/m^3.

d) Calculer le potentiel gravitationnel U à l'extérieur et à l'intérieur de la Terre. Représenter qualitativement la fonction U en fonction du rayon r.

Vérifier l'orientation des lignes du champ vectoriel $\overrightarrow{g}$ par rapport aux lignes d'equipotentiel.

e) Quelle est la variation d'énergie potentielle de l'objet de masse m quand on le soulève de la surface terrestre jusqu'à une hauteur h ?

f) On pose par définition $E_p = \iiint\limits_{\mathcal{V}} dE_p = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathcal{V}} U(r)dm$ où E_p est l'énergie potentielle totale de la Terre et $\mathcal{V}$ son volume. Calculer l'énergie potentielle totale de la Terre.

g) En déduire la formule générale pour l'énergie potentielle d'une sphère de rayon r et de densité ρ. En déduire comment varie l'énergie potentielle de cette sphère si on la contracte ou l'étire d'un petit rayon dr.

h) Quelle serait l'énergie libérée si on contractait le Terre d'un mètre ?