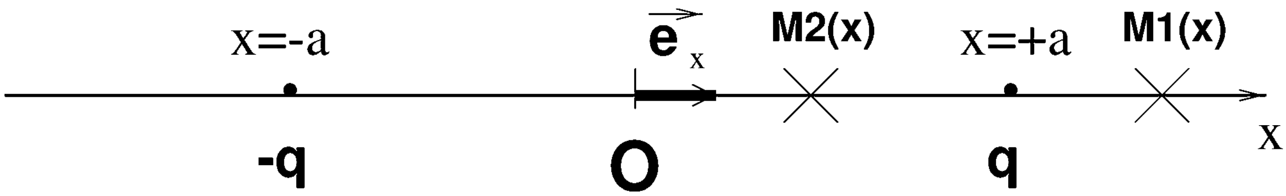
Licence 3 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 302, Outil Physique et Géophysique, 2006/2007

TD ⑤ Dipole et quadrupole électrostatique

Exercice 1 - Droite portant deux charges q et $-q$.

On considère une droite (Ox) portant deux charges q et $-q$ distantes de $2a$. On cherche à calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ généré en tout point de cette droite par les deux charges.



a) Donner l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ créé par la charge q en un point M_1 situé à une position $x > a$ (voir figure). Cette expression dépendra entre autres de x et a. De la même manière, donner l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ créé par la charge $-q$ en M_1.

b) Quelle règle utilise-t-on pour calculer le champ $\overrightarrow{E}_{\text{total}}$ en M_1 ? Donner l'expression du champ $\overrightarrow{E}_{\text{total}}$ en M_1.

c) En suivant la même démarche, calculer $\overrightarrow{E}_{\text{total}}$ pour un point M_2 situé dans la zone $0 < x < a$ (voir figure).

d) Pourquoi avons nous considérer deux régions distinctes pour le calcul de $\overrightarrow{E}_{\text{total}}$? Donner une représentation qualitative de l'allure de $E(x)$ pour tout $x > 0$.

e) Démontrer pourquoi $E(-x) = E(x)$ quand on calcule le champ électrostatique en des points M d'abscisses négatives.

Exercice 2 - Quadrupole électrique linéaire.

Rappel de cours

– L'expression du potentiel électrique pour une charge électrique ponctuel q varie en $1/r$ et s'écrit

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

– L'expression du potentiel électrique pour un dipole électrique $(+q, -q)$ (voir figure 1) varie en $1/r^2$ et s'écrit

$$V = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

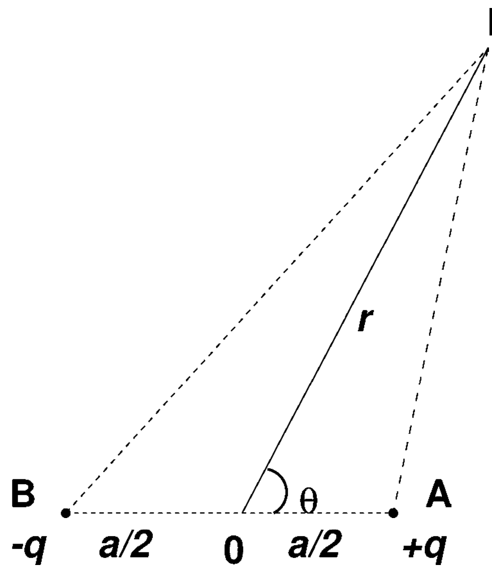


FIG. 1 – Schéma d'un dipole électrostatique.

Il s'agit ici de démontrer que l'expression d'un quadrupole électrique $(+q, -2q, +q)$ (figure) varie en $1/r^3$. Un quadrupole linéaire est décrit et schématisé sur la figure . L'expression que l'on cherche à démontrer dans cet exercice est la suivante

$$V(M) = \frac{qa^2(3\cos^2\theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

On suivra la même demarche que celle utilisée en cours pour la demonstration du formule du dipole.

a) Appliquer le principe de superposition (en utilisant la formule d'une charge ponctuelle) pour écrire l'expression générale du potentiel électrique au point M.

b) On utilise alors une relation valable quelque soit le triangle IJK :

$$i^2 = j^2 + k^2 - 2jk\cos\widehat{I}$$

où i, j et k sont les 3 longueurs des côtés du triangle et $\widehat{I}$ l'angle défini par les deux côtés j et k.

Exprimer ainsi le rapport $1/r_1$ en fonction de $r, a,$ et $\cos\theta$ et en faisant apparaître des termes $<< 1$.

c) On rappelle le développement limité au second ordre de l'expression

$$(1-\epsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \text{ où } \epsilon << 1.$$

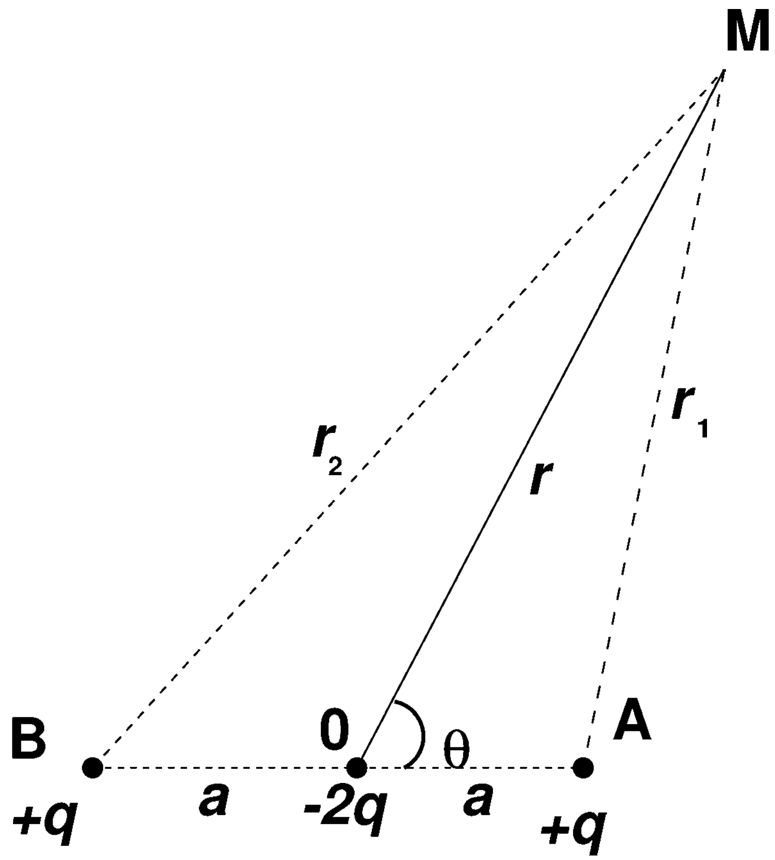


FIG. 2 – Schéma d'un quadrupole électrostatique : trois charges alignées, -2q en 0, $+q$ en A(+a), $+q$ en B(-a), et a est supposée très petit devant r.

Appliquer ce développement limité à l'expression de $1/r_1$ pour démontrer que $1/r_1$ peut s'écrire

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^2}(3\cos^2\theta - 1) + ...\right]$$

lorsqu'on considère que $a << r$.

d) Exprimer de la même façon le rapport $1/r_2$.

e) En utilisant les questions 1), 3) et 4), retrouver l'expression du potentiel électrostatique du quadrupole.

f) En déduire l'expression du champ électrostatique au point M.