Licence 3 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 302, Outil Physique et Géophysique, 2006/2007

TD ④ Champ Électrostatique – Théorème de Gauss et symétries

Symétries et champs.

Rappel de cours

Un plan est appelé **plan de symétrie** d'un problème si, après une symétrie par rapport à ce plan, les sources du champ sont inchangées.

Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ **appartient** nécessairement à tout plan de symétrie des charges.

Les symétries du problème sont à étudier dès le début d'un exercice d'électrostatique ; bien souvent, les symétries simplifient grandement les calculs.

Exercice 1 - Densité linéïque de charge.

Un anneau de rayon R porte la charge Q uniformément répartie à sa périphérie. En utilisant exclusivement les plans de symétrie des distributions de charge électrostatique, déterminer la direction du champ $\overrightarrow{E}$:

a) sur l'axe de l'anneau.

b) dans le plan de l'anneau.

c) Que vaut nécessairement le champ au centre ?

Densité surfacique et volumique de charge - Calcul de champs.

Rappel de cours

Le théorème de Gauss permet de calculer le champ électrostatique dans des problèmes où la symétrie de la distribution des charges électrostatiques est évidente ; le calcul du flux sortant Φ du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ à travers une surface fermée $\mathcal{S}$:

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

(dans lequel $\mathcal{S}$ est une surface judicieusement choisie) permet alors de déterminer l'expression du vecteur $\overrightarrow{E}$ en tout point de la surface. Cette surface s'appelle **surface de Gauss**.

Le théorème de Gauss s'écrit

$$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

l'intégrale de volume étant étendue au volume $\mathcal{V}$ limité par la surface fermée $\mathcal{S}$, Q_{int} étant la somme des charges électrostatiques contenues à l'**intérieur** du volume $\mathcal{V}$.

Exercice 2 - Sphère chargée en surface. Théorème de Gauss.

Soit une sphère de centre O, de rayon R, et chargée uniformément en surface avec une densité surfacique de charge σ.

a) Quelle est la géométrie du champ $\vec{E}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

b) Calculer le champ $\vec{E}$ en un point M à l'extérieur de la sphère en utilisant le théorème de Gauss. (On prendra pour surface de Gauss la sphère centrée en O et passant par M).

c) Calculer le champ $\vec{E}$ en un point M à l'intérieur de la sphère en utilisant le théorème de Gauss. (On prendra pour surface de Gauss la sphère centrée en 0 et passant par M).

d) Représenter $E(r)$ en fonction de r.

Exercice 3 - Sphère uniformément chargée.

Soit une sphère uniformément chargée de centre O de rayon R et de densité volumique ρ.

a) Calculer le champ $\vec{E}$ en un point M à l'extérieur de la sphère en utilisant le théorème de Gauss.

b) Calculer le champ $\vec{E}$ en un point M à l'intérieur de la sphère.

Densité linéïque et surfacique de charge - Calcul de potentiel

Rappel de cours

Le potentiel électrostatique V est relié au gradient du champ électrostatique $\vec{E}$ par la formule

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V.$$

Le potentiel V se calcule généralement par intégration :
<u>Pour une distribution discrète de charges :</u>

$$V = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \right)$$

où pour chaque charge i, r_i est la distance entre le point où l'on calcule le potentiel et la charge q_i.
<u>Pour une distribution linéïque de charges :</u>

$$V = \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$$

où l'on intègre sur une ligne chargée dont la densité linéïque de charge est λ.
<u>Pour une distribution surfacique de charges :</u>

$$V = \iint_{S} \left(\frac{\sigma ds}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$$

où l'on intègre sur la surface chargée dont la densité surfacique de charge est σ.
<u>Pour une distribution volumique de charges :</u>

$$V = \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$$

où l'on intègre sur le volume chargé dont la densité volumique de charge est ρ.

Dans chacun des cas, r correspond à la distance entre l'élément de longueur dl, de surface dS ou de volume $d\tau$ et le point M où l'on calcule le potentiel.

Exercice 4 - Segment uniformément chargé.

Soit un fil uniformément chargé de longueur L et de charge linéïque λ, orienté selon l'axe (Oy). Le segment s'étend de 0 à L.

a) Calculer le potentiel V au point M sur l'axe (Ox).

$$\left(\text{On pourra utiliser } \frac{d}{dy}\left(\ln[y+\sqrt{y^2+a^2}\,]\right) = \frac{1}{\sqrt{y^2+a^2}} \right).$$

b) Vérifier le résultat quand L tend vers 0.

c) Est-ce que ce calcul nous permet d'en déduire la valeur du champ $\overrightarrow{E}$ au point M ?

d) Comparer le résultat de a) avec le calcul du champ $\overrightarrow{E}$ effectué en cours due pour la même distribution de charges .

Exercice 5 - Disque uniformément chargé.

Soit un disque de rayon R uniformément chargé en surface. La densité surfacique de charge vaut σ.

a) Calculer le potentiel V au point M sur l'axe vertical (Ox) à l'aplomb du centre 0 du disque.

b) Calculer le champ électrostatique à partir du potentiel, et vérifier que l'on trouve bien le même résultat que lors du TD3 avec un calcul direct.

c) Qu'obtient-on pour ce champ à longue distance ?