Licence 3 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 302, Outil Physique et Géophysique, 2006/2007

TD ② Opérateurs vectoriels pour la Physique

Gradient scalaire

Rappel de cours

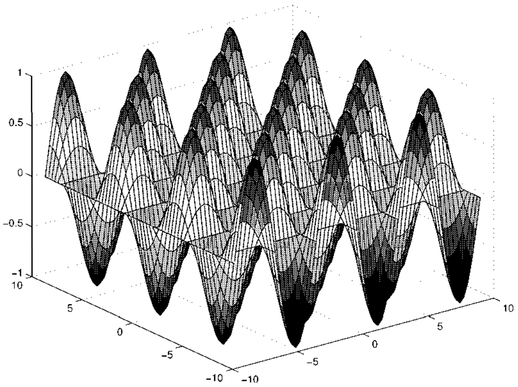
L'opérateur $gradient$ s'applique à un champ scalaire qu'il transforme en un champ vectoriel. Le vecteur gradient du champ f nous dit « où se déplacer » ou « où aller » dans l'espace pour maximiser les variations de f. Ceci apparaît clairement dans la définition intrinsèque de f (définition applicable quel que soit le système de coordonnées) :

$$df = f(M + dM) - f(M) = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dM} = \mid \overrightarrow{\text{grad}} f \mid\mid \overrightarrow{dM} \mid \cos(\overrightarrow{\text{grad}} f, \overrightarrow{dM})$$

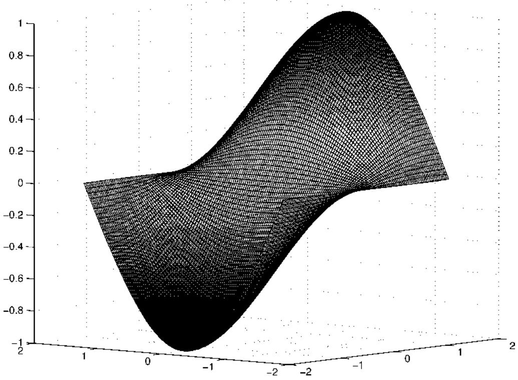
Si $\overrightarrow{\text{grad}} f$ et $\overrightarrow{dM}$ sont colinéaires, alors on maximise les variations d'amplitude de f (df est maximum dans ce cas car $\cos(\overrightarrow{\text{grad}} f, \overrightarrow{dM}) = 1$).

Exercice 1

On considère le champ scalaire suivant $f(x, y) = \cos(x)\sin(y)$ défini en tout point du plan (O, x, y). La vue tridimensionnelle de ce champ scalaire est représentée sur les deux figures ci-dessous.



Fonction $f(x, y) = \cos(x)\sin(y)$ pour x et y variant de -3π à +3π



Fonction $f(x, y) = \cos(x)\sin(y)$ pour x et y variant de -$\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

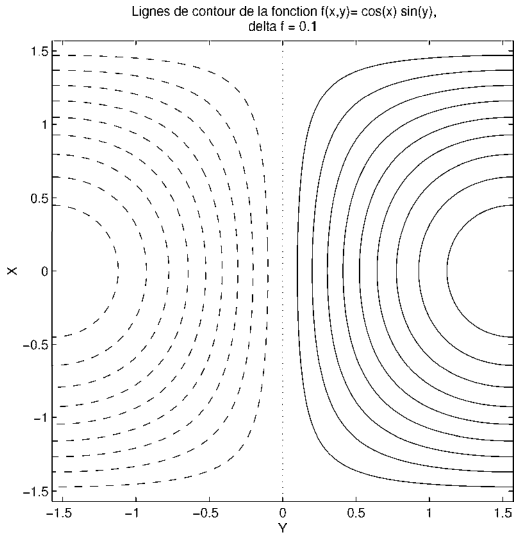
a) Vérifier que les lignes de niveau de ce champ scalaire sur le plan (O, x, y) pour x et y variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ sont bien tracées sur la figure ci-dessous.

Sans calcul, placer les vecteurs gradient aux points suivants $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $(0, 0)$, $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$ sur la figure suivante.

b) Verifier vos prédictions vectorielles en calculant explicitement le vecteur gradient aux différents points (en utilisant le formulaire distribué en cours).

Exercice 2

a) Déterminer les composantes du vecteur gradient d'une fonction scalaire en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z), sphériques (r, θ, ϕ). Pour cela, on suivra la même démarche qu'en cours pour les coordonnées cartésiennes : on commencera par écrire un petit vecteur déplacement $\overrightarrow{dM}$, puis la



différentielle totale df pour chaque système de coordonnées. En utilisant la définition intrinsèque du vecteur gradient, on identifiera terme à terme les différentes composantes du gradient.

b) Calculer le vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}f$ pour

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= z^2 \\
f(r,\theta,\phi) &= \frac{\cos\theta}{r^2} \\
f(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{r} \\
f(r,\theta,\phi) &= \frac{\cos(\theta)\sin(\phi)}{r^2} \\
f(\rho,\theta,z) &= \frac{z^2\sin(\theta)}{\rho^3}
\end{aligned}
$$

Exercice 3

Soit un champ scalaire f.

a) L'ensemble des points tels que $f = constante$ définit une surface.

Montrer que $\overrightarrow{\text{grad}}f$ est orthogonal à la surface $f = constante$ correspondante.

b) Montrer que $\overrightarrow{\text{grad}}f$ est dirigé vers les « f croissants ».

Circulation d'un vecteur

Rappel de cours

Soit un vecteur $\overrightarrow{A}$ défini en tout point de l'espace dans un plan (O,x,y). On se donne deux points M_1 et M_2 d'abscisse x_1 et x_2. Sur un « chemin » reliant M_1 à M_2 on définit un vecteur déplacement $\overrightarrow{dM}$. Par définition, la circulation de $\overrightarrow{A}$ entre M_1 et M_2 s'écrit :

$$\mathcal{C}_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dM}$$

Dans le cas particulier où $\overrightarrow{A}$ s'écrit sous la forme d'un gradient d'une fonction f, $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{grad}} f$,

$$\mathcal{C}_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{M_1}^{M_2} df = f(M_2) - f(M_1)$$

la circulation est indépendante du chemin emprunté pour aller de M_1 à M_2.

Exercice 4

On considère un cercle de centre O et de rayon R situé dans le plan (O,x,y). Soit le champ vectoriel $\overrightarrow{V}(M)$ tel que :

$$\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{OM}$$

Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de ce cercle. (Pour cela on commencera par choisir le système de coordonnées le plus adapté puis on écrira le petit déplacement $\overrightarrow{dM}$ dans ce repère de coordonnée le long du cercle.)

Flux à travers une surface

Rappel de cours

Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ défini en tout point de l'espace. Soit maintenant une surface S dont un petit élément infinitésimal est $\overrightarrow{dS} = dS\,\overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire normal à cette surface. Par définition, le flux Φ du champ de vecteur $\overrightarrow{A}$ à travers la surface S est :

$$\Phi = \iint_S (\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}) dS = \iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Exercice 5

a) L'expression du champ électrique crée par une charge électrique ponctuelle q a l'expression suivante :

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$$

en coordonnées sphériques.

Calculer le flux de ce champ de vecteur à travers une sphère de rayon R. Démontrer que ce flux est indépendant du rayon R.

b) Soit un champ de vecteur $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{e}_z$ en coordonnées cylindriques.

Calculer le flux de $\overrightarrow{A}$ à travers un disque centré en O, de rayon R et situé dans la plan (O,x,y).

Rotationnel d'un champ vectoriel

Exercice 6

On considère le même champ de vecteur que dans l'exercice 4, $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{OM}$ où M est un point quelconque de l'espace.

a) Exprimer le champ vectoriel $\overrightarrow{V}(M)$ en coordonnées cartésienne, cylindrique et sphériques.

b) Vérifier que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = 2\overrightarrow{e}_z$ en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

c) Calculer le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}$ à travers la surface d'une demi-sphère s'appuyant sur le cercle centré en O et de rayon R.

d) Comparer les résultats obtenus aux questions 4), 5b), 6b). En conclure que le théorème de Stokes est vérifié.

Divergence d'un vecteur

Rappel de cours

La relation intégrale intrinsèque définissant la divergence d'un vecteur est la suivante :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\overrightarrow{A} dV = \oiint_{S} \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{S}$$

où V est un volume donné et S est la surface fermée délimitant le volume V.

Le résultat de la divergence d'un VECTEUR est un SCALAIRE.

Une définition intuitive (très qualitative ...) de cet opérateur est la suivante : *La divergence d'un vecteur est le flux extérieur d'un champ de vecteur par unité de volume*.

Une autre façon de le voir : lorsqu'on considère un champ vectoriel à divergence nul, tout « ce qui rentre dans un volume fermé (flux) doit ressortir simultanément de l'autre côté ».

Exercice 7

a) Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{A} = 3y\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{B} = 3x\overrightarrow{e_y}$. Représenter ces champs et expliquer qualitativement pourquoi un des champs est à divergence nul et l'autre non.

b) En mécanique des fluides, lorsqu'on considère un fluide incompressible, on écrit $\mathrm{div}\overrightarrow{U} = 0$ où $\overrightarrow{U}$ est le champ de vitesse du fluide défini en tout point de l'espace. Comprenez vous pourquoi ?

c) Calculer le scalaire divergence pour

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A} &= -x\overrightarrow{e}_x + y\overrightarrow{e}_y \\
\overrightarrow{A} &= \frac{1}{\rho}\overrightarrow{e}_\rho \\
\overrightarrow{A} &= \frac{1}{r^2}\overrightarrow{e}_r
\end{aligned}$$