Licence 3 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 302, Outil Physique et Géophysique, 2006/2007

TD ⑩ Champ de Température

Rappel de cours

Loi de Fourier

Cette loi définit **le flux de chaleur** $\overrightarrow{q}$ par unité de surface (unités W / m^2). Le flux de chaleur dérive d'un potentiel scalaire, la température, selon

$$\overrightarrow{q} = -k\,\overrightarrow{\text{grad}}T,$$

où k est la conductivité thermique (unités W/(m.K)) et T la température (unités K).

Equation de la chaleur

La conservation de l'énergie dans un fluide au repos donne

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k}{\rho C_P}\Delta T = \frac{A}{\rho C_P}$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\Delta T = \frac{A}{\rho C_P}$$

où ρ est la masse volumique du fluide considéré (unités kg/m^3), C_P la chaleur spécifique par unité de masse à pression constante $\Big($unités J/(kg.K)$\Big)$ (par définition la chaleur spécifique est la quantité d'énergie requise pour augmenter de 1°C 1 kg de fluide considéré), A est le taux de production de chaleur interne par unité de volume (unités W/m^3) dans le corps considéré (dans le cas de la Terre, A représente principalement le taux de de chaleur produit par la désintégration d'éléments radioactifs dans les roches de la croûte et du manteau terrestre) et κ est la diffusivité thermique (unités m^2/s).

Dans le cas particulier où il n'y a pas de production de chaleur interne et où le système est stationnaire, l'équation de la chaleur se réduit à

$$\Delta T = 0.$$

C'est l'équation de Laplace.

Si le fluide se déplace à la vitesse $\overrightarrow{u}$ (unités m/s), l'équation de la chaleur devient :

$$\rho C_P\frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_P\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\text{grad}}T\right) - k\Delta T = A$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{\text{grad}}T = \kappa\Delta T + \frac{A}{\rho C_P}.$$

Exercice 1 – Profil de température entre deux cylindres - Equation de Laplace

Soient deux cylindres concentriques de rayon r_1 et r_2 ($r_1 > r_2$), de hauteur L, aux températures T_1 et T_2 respectivement ($T_2 > T_1$). On veut calculer le profil conductif de température entre les deux cylindres en supposant que le flux de chaleur traversant chaque cylindre est constant (problème stationnaire en temps).

a) Établir l'expression du flux de chaleur intégré sur toute la surface d'un cylindre imaginaire de rayon r. Utiliser la valeur Q de ce flux en fonction de r_1, r_2, T_1 et T_2 pour déterminer $T(r)$ entre r_1 et r_2.

b) Représenter graphiquement $T(r)$ entre r_1 et r_2. Représenter qualitativement le vecteur flux de chaleur en r_1 sur une coupe des cylindres vue de haut.

A. N. : Calculer Q pour r_1 = 40 cm, r_2 = 20 cm, T_1 = 10 °C et T_2 = 30 °C.

Exercice 2 – Flux de chaleur à la base d'une croûte

On veut estimer la température à la base d'une croûte terrestre d'épaisseur $H = 43$ km. Pour cela, on effectue un forage en surface. Le gradient de température mesuré est égal à 2.4 °C / 100 m, la conductivité thermique mesurée à partir des carottes $k = 2.5$ W/(m.K), la température du sol en surface $T(0) = 10$ °C, le taux de production de chaleur (éléments radioactifs) en surface $A(z = 0) = 4.8\,\mu$W/m^3.

a) Quelle est la valeur du flux de chaleur en surface, $q(0)$?

b) On admet que la conductivité thermique k reste constante dans la croûte et que le taux de production de chaleur décroît avec la profondeur selon la loi

$$A(z) = A(0)\exp\left(-\frac{z}{D}\right) \quad \text{où } D = 10\text{ km}.$$

On suppose que la croûte est immobile et on se place dans un régime stationnaire en temps. écrire l'équation de la chaleur dans cette situation. En déduire $T(z)$ et $q(z)$ en intégrant deux fois l'équation de la chaleur.

c) Calculer, au niveau du Moho (discontinuité entre croûte et manteau), la température $T(H)$, la valeur du flux de chaleur $q(H)$ ainsi que la valeur du gradient de température.

Exercice 3 – Flux de chaleur à la surface de la Lune

La valeur moyenne du flux de chaleur mesurée sur la Lune par les missions Apollo 15 et 17 était de 18 mW/m^2. On se propose de calculer la valeur théorique de ce flux en supposant que le taux moyen de production de chaleur est le même que celui du manteau terrestre, soit $A = 20.5\,10^{-9}$ W/m^3.

En coordonnées sphériques, l'équation de la chaleur (pour un état stationnaire et pour des variations de température uniquement radiales) s'écrit :

$$\frac{k}{r^2}\frac{d\left(r^2\dfrac{dT}{dr}\right)}{dr} + A = 0 \quad \text{avec A constant.}$$

a) Sachant que le flux (ici radial) est donné par $q = -k\dfrac{dT}{dr}$, trouver l'équation différentielle du premier ordre en q à satisfaire à partir de l'équation de la chaleur.

Obtenir une expression simple reliant q, A et r en résolvant l'équation. On fera le changement de variable $u = \dfrac{q}{r}$ et on utilisera

$$\frac{dx}{a+bx} = d\left[\frac{1}{b}\ln\left(a+bx\right)\right].$$

On suppose que lorsque r tend vers 0, q tend vers 0 (flux nul au centre).

b) Sachant que le rayon de la Lune est 1738 km, combien vaut le flux de chaleur en surface à partir du modèle développé en a) ?

En comparant cette valeur à la valeur mesurée par Apollo 15 et 17, quelle est votre interprétation du résultat ?

Exercice 4 – Température dans un tunnel

Dans le cadre d'un projet de grand tunnel sous les Alpes, on souhaite connaître les conditions de travail des hommes et des machines qui vont réaliser l'ouvrage. On s'intéresse en particulier à la valeur de la température susceptible d'être rencontrée par le tunnelier au centre de l'ouvrage, c'est-à-dire là où la couverture rocheuse est la plus épaisse. On utilise le modèle schématisé en figure 1 et dont les caractéristiques sont les suivantes :

– les extrémités P et Q du tunnel sont à la même altitude $h_0 = 500$ m.
– en M, à mi-chemin entre P et Q, la couverture rocheuse culmine à une altitude moyenne égale à $h_1 = 2500$ m.
– la température du sol diminue avec l'altitude selon la loi $T(h) = a - bh$ où $a = 12.5$°C et $b = 0.005$°C/m.
– le gradient thermique moyen superficiel mesuré en forage en P et Q est égal à 2.3°C / 100m.
– pour l'ensemble du modèle, on suppose la valeur de la conductivité thermique $k = 3$ W/(m.K) constante et la valeur de la chaleur produite par la radioactivité des roches $A = 2.7\,\mu$W/m^3 également constante.
– on suppose que le flux de chaleur q_1 provenant de l'intérieur de la Terre à la profondeur $Z_1 = 10$ km est constant en-dessous du tunnel.
– on néglige l'existence d'un gradient horizontal de température.

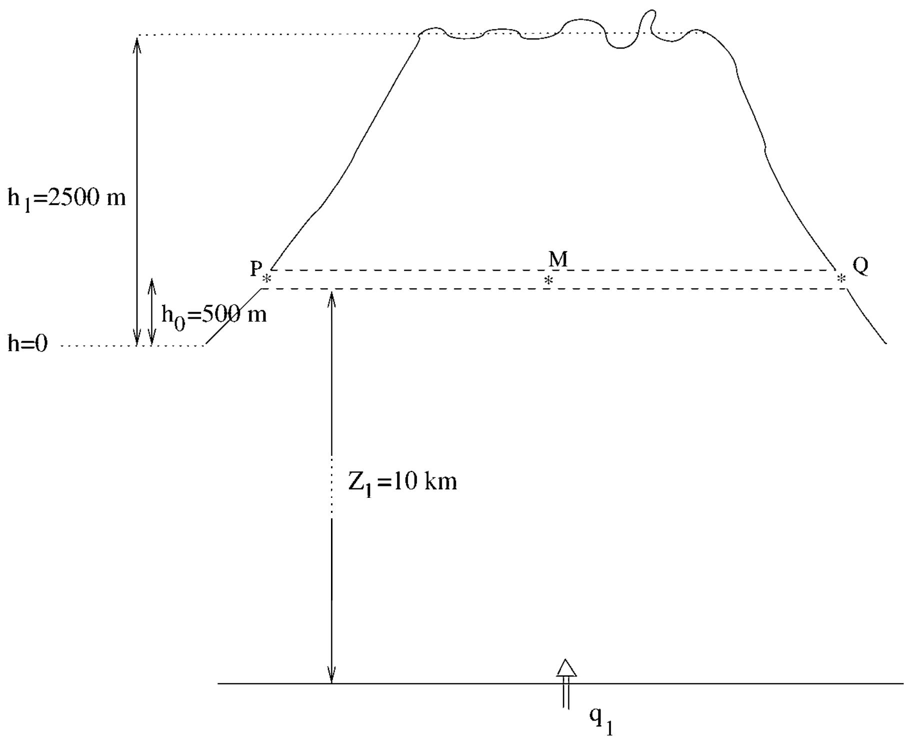

FIG. 1 – Vue de côté du futur tunnel.

a) Calculer la valeur du flux de chaleur q_0 en P et Q. En déduire la valeur de q_1 en supposant que q_0 est la somme de q_1 et de la chaleur provenant de la désintégration des éléments radioactifs sur la hauteur totale $Z_1 = 10$ km.

b) Établir l'équation $T(z)$ à la verticale de M : on prendra comme niveau de référence ($z = 0$) le niveau d'altitude h_1 et comme conditions aux limites la température du sol à cette altitude (à calculer) ainsi que la valeur q_1 du flux profond. En déduire la température au point M. Que vaut alors le flux de chaleur en surface à la verticale de M ?