Licence 3 des Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement, Université Joseph-Fourier

U.E. TUE 302, Outil Physique et Géophysique, 2006/2007

TD ① Outils Mathématiques pour la Physique

Produit scalaire

Rappel de cours

Un scalaire est défini par sa magnitude et n'est pas associé à une direction.

Un vecteur est défini par sa magnitude (norme ou module) et sa direction (via ses composantes dans un repère donné).

Soit $\overrightarrow{A}$ un vecteur défini dans un repère cartésien orthonormé, de composantes (A_x, A_y, A_z). $\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$, $\overrightarrow{e}_y$ sont les vecteurs unitaires (de normes égales à 1) du repère orthonormé $(0, x, y, z)$.

La norme (ou module) du vecteur $\overrightarrow{A}$ s'écrit

$$\mid \overrightarrow{A} \mid = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Soit $\overrightarrow{B} = (B_x, B_y, B_z)$. Par définition le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_x\, B_x + A_y\, B_y + A_z\, B_z = \mid \overrightarrow{A} \mid\mid \overrightarrow{B} \mid \cos\theta$$

où θ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.

Exercice 1

Soit le vecteur $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{e}_x + 2\overrightarrow{e}_y + 3\overrightarrow{e}_z$ défini dans un repère orthonormé (O, x, y, z).

a) Déterminer le module de ce vecteur ainsi que le module de la projection de $\overrightarrow{A}$ sur le plan $(0, x, y)$.

b) Donner les expressions des deux vecteur unitaires perpendiculaires à $\overrightarrow{A}$ et situés dans le plan $(0, x, y)$.

c) Calculer le produit scalaire entre $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B} = 6\overrightarrow{e}_x - 3\overrightarrow{e}_y$. Déterminer l'angle entre $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.

Produit vectoriel

Rappel de cours

Par définition le résultat du produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est un vecteur perpendiculaire au plan $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$. Il s'écrit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\overrightarrow{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\overrightarrow{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\overrightarrow{e}_z \\ &= \mid \overrightarrow{A} \mid\mid \overrightarrow{B} \mid \sin\theta\ \overrightarrow{n} \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$ et θ est l'angle entre $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.

Exercice 2

Soient trois vecteurs :
$\overrightarrow{A} = 5\overrightarrow{e}_x - 7\overrightarrow{e}_y - 3\overrightarrow{e}_z$
$\overrightarrow{B} = 3\overrightarrow{e}_x - 2\overrightarrow{e}_y + 3\overrightarrow{e}_z$
$\overrightarrow{C} = -\overrightarrow{e}_x - 3\overrightarrow{e}_y - 4\overrightarrow{e}_z$

a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$

b) Vérifier que $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.

c) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}$. Calculer l'angle entre $\overrightarrow{D}$ et l'axe $O\overrightarrow{z}$?

Dérivée d'une fonction à plusieurs variables

Rappel de cours

Soit une fonction à plusieurs variables y = f($x_i, x_j, x_k, ...$),

$$\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \ldots$$

sont dites *derivées partielles*.

Par définition,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k \ldots$$

df est la différentielle totale et $\frac{\partial f}{\partial x_1}$... sont les différentielles partielles.

Exercice 3

a)

Calculer les dérivées simples des fonctions suivantes :
$y = f(x) = 6xe^{3x}$
$y = \dfrac{4x}{\sqrt{3x+1}}$
$y = (\ln(8x))^2$

b) Calculer les différentielles partielles des fonctions suivantes par rapport à (ρ,θ,z) (coordonnées cylindriques).
$f(\rho, \theta, z) = \rho \cos(\rho\theta)$
$f(\rho, \theta, z) = \rho\ z\ \cos((\theta)^2 + 3z)$

Intégrales double et triple

*R*appel de cours

Soit une fonction de deux variables x_1 et x_2 et un domaine plan $\mathcal{D}$ (au sein du plan (O, x_1, x_2)), borné, appelé domaine d'intégration. On suppose que l'on peut découper ce domaine en rectangles infinitésimaux (voir figure). Soit $\Delta S_i = \Delta x_1 \Delta x_2$ la surface du i-ème rectangle. On associe à ce rectangle le point central de coordonnées x_{1i}, x_{2i}. A ce point est associée la valeur de la fonction $f(x_{1i}, x_{2i})$.

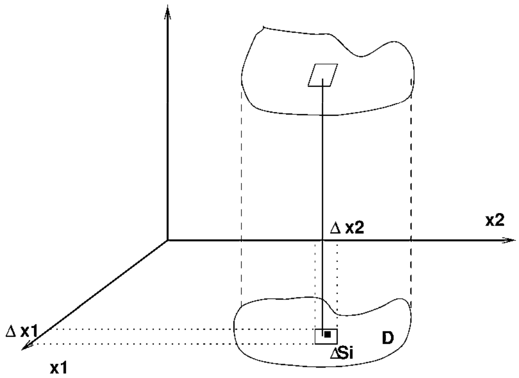
Soit la somme

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} f(x_{1i}, x_{2i}) \Delta S_i$$

Si lorsque N (le nombre de rectangles) tend vers l'infini, il existe une valeur limite de cette somme, alors la limite est l'intégrale double de la fonction f sur le domaine $\mathcal{D}$. On la note

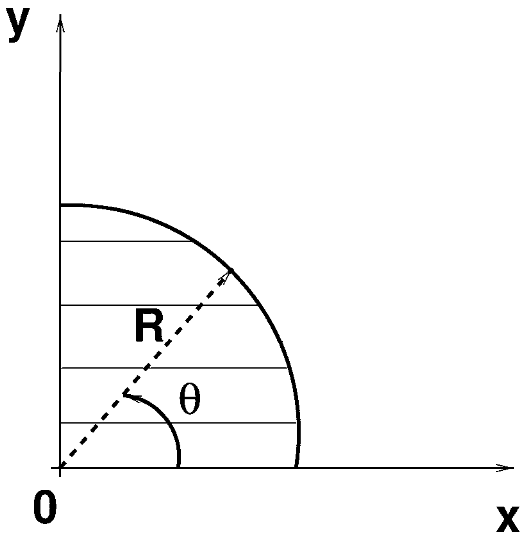
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

On calcule cette intégrale double en intégrant d'abord par rapport à une variable (en maintenant la seconde constante) puis par rapport à l'autre variable.



Exercice 4

On veut calculer le quart de la surface d'un disque comme schématisé sur la figure ci-dessus. Pour cela, on va calculer une intégrale double I en coordonnées cartésiennes $(0, x, y)$ puis en coordonnées polaires $(0, r, \theta)$.



a) Écrire l'intégrale surfacique en coordonnées cartésiennes de ce quart de disque en précisant en particulier l'expression des rectangles infinitésimaux ainsi que les bornes d'intégration. Démontrer que

$$I = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

b) Calculer l'intégrale surfacique à l'aide de coordonnées polaires en précisant en particulier l'expression de l'élément infinitésimal de surface choisi.

Exercice 5

Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_{1/2}^{R} \int_{0}^{\pi/4} \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r} dr d\theta$

Exercice 6

Calculer le volume compris entre deux cylindres de rayon R et 2R et de hauteur H. Commencer par définir l'élément volumique en coordonnées cylindriques.