Licence 3 – Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement

Université Joseph-Fourier

TUE 302 : Outil Physique et Géophysique

① Outils mathématiques pour la Physique

Daniel.Brito@ujf-grenoble.fr
MAISON DES GÉOSCIENCES
UNIVERSITÉ JOSEPH–FOURIER
04 76 82 80 42

Objectifs des Outils Mathématiques

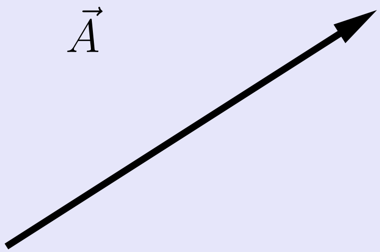
Objectifs: Apprendre à manipuler les outils mathématiques pour caractériser au mieux les champs physiques et géophysiques que l'on est amené à décrire.

Définition de nouveaux opérateurs scalaires et vectoriels destinés à SIMPLIFIER l'analyse du problème physique considéré.

Exemple : L'opérateur vectoriel div.

Rappel d'Algèbre

- ✓ Un SCALAIRE est défini par sa <u>magnitude</u> et n'est pas associé à une direction.
  exemple: la masse m d'un objet, le temps t.
- ✓ Un VECTEUR a par contre une <u>magnitude</u> et une <u>direction</u>.
  exemple: vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$, force $\overrightarrow{F}$



Page d'accueil
Page de Titre
Page 3 de 46
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

On définit le vecteur $\overrightarrow{A}$ dans un système de coordonnées donné (cartésien, cylindrique, sphérique, etc...).
Dans l'espace cartésien orthonormé:

$$\overrightarrow{A} = A_x \overrightarrow{e}_x + A_y \overrightarrow{e}_y + A_z \overrightarrow{e}_z$$

$\left(\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z\right)$: vecteurs unitaires

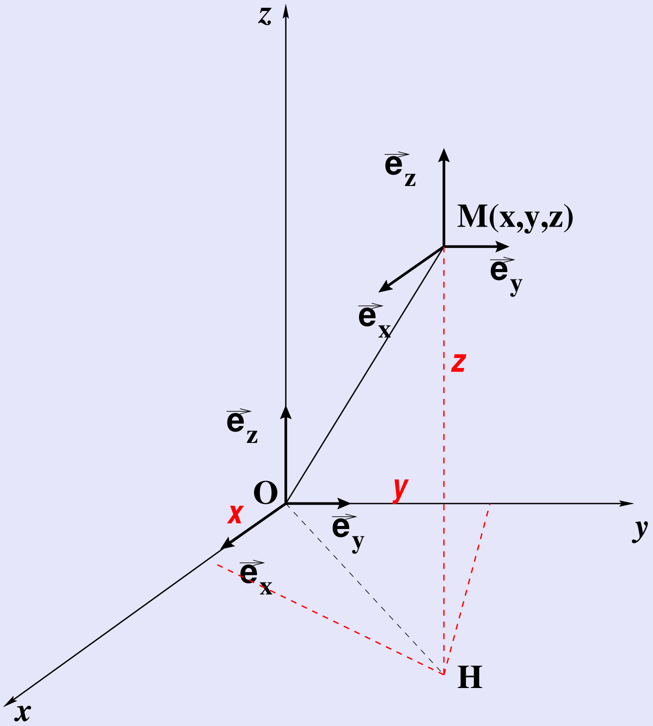
$$\overrightarrow{e}_A = \frac{\overrightarrow{A}}{\mid \overrightarrow{A} \mid}$$

avec $\mid \overrightarrow{A} \mid = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ la norme du vecteur $\overrightarrow{A}$.

En Sciences de la Terre, les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques sont souvent utilisés.

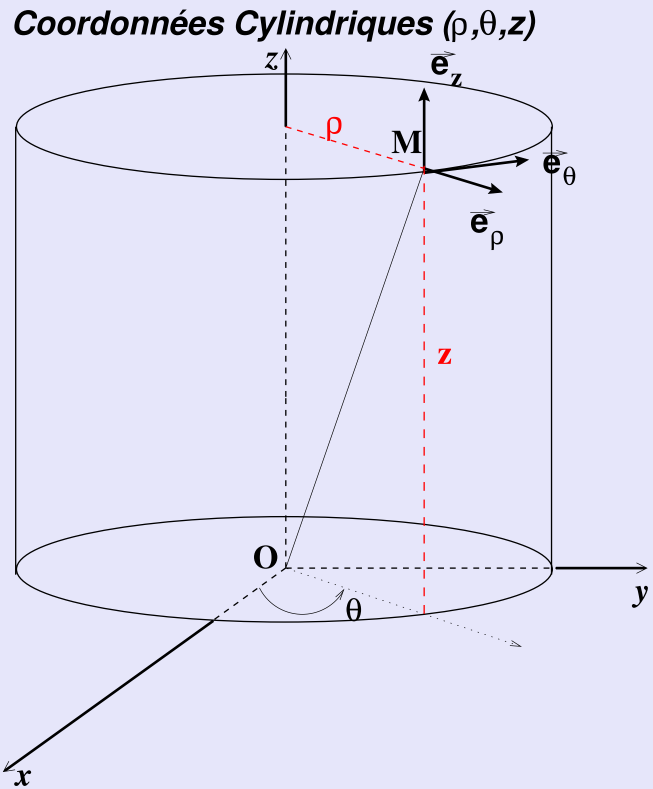
Coordonnées cartésiennes

Coordonnées Cartésiennes (x,y,z)



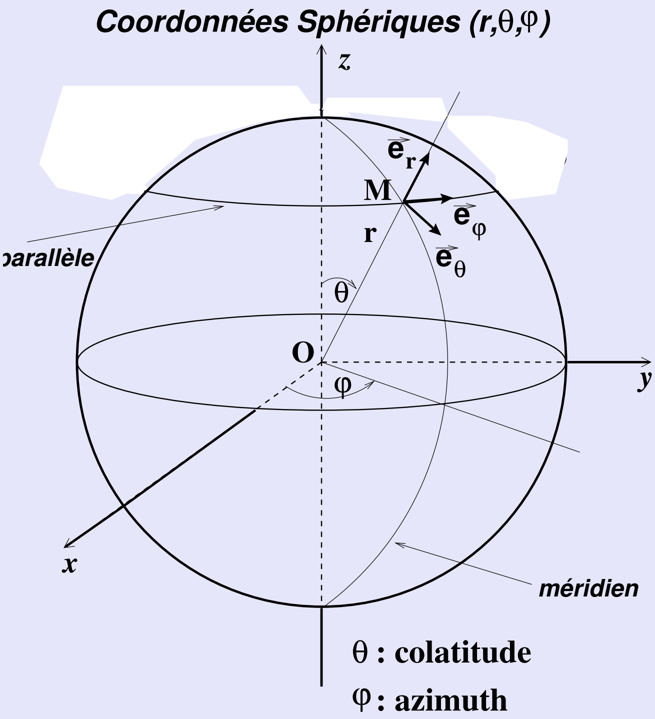
$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

Coordonnées cylindriques



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \rho\,\overrightarrow{\mathrm{e}}_{\rho} + z\,\overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{Z}}$$

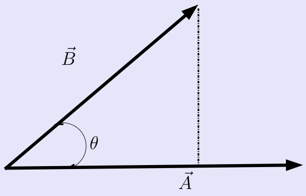
Coordonnées sphériques



$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e}_r$$

Algèbre
cartésiennes
cylindriques
sphériques
Produit scalaire
Produit vectoriel
Analyse
Intégrale 2D et 3D
Les Champs
Gradient
Divergence
Rotationnel
Helmholtz
Laplacien
Circulation
Flux
Green-Ostrogradsky
Stokes
Page d'accueil
Page de Titre
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Produit scalaire de deux vecteurs



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} &= (A_x\overrightarrow{e}_x + A_y\overrightarrow{e}_y + A_z\overrightarrow{e}_z) \\
&\quad \cdot \quad (B_x\overrightarrow{e}_x + B_y\overrightarrow{e}_y + B_z\overrightarrow{e}_z) \\
&= |\overrightarrow{A}| \ |\overrightarrow{B}| \cos\theta \\
&= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\
&= \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A}
\end{aligned}
$$

Si deux vecteurs sont perpendiculaires, leur produit scalaire est nul. Le produit scalaire est commutatif.

Exercice: Calculer le produit scalaire entre $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

1) en faisant intervenir l'angle entre les deux vecteurs
2) en développant le produit scalaire entre les composantes.

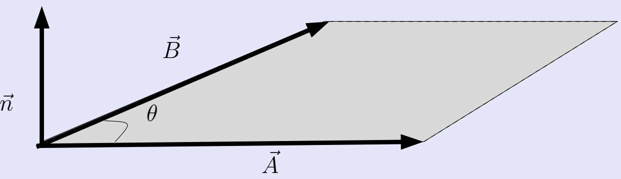
Le résultat du produit scalaire est un **SCALAIRE**.

Produit vectoriel de deux vecteurs

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = |\overrightarrow{A}|\ |\overrightarrow{B}| \sin\theta\ \overrightarrow{n}$$

où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire normal

à la surface délimitée par le plan $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$.



$$= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\overrightarrow{e_x} + (A_zB_x - A_xB_z)\overrightarrow{e_y} + (A_xB_y - A_yB_x)\overrightarrow{e_z}$$

Exercice: Calculer le produit vectoriel entre $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) en faisant intervenir l'angle entre les deux vecteurs
2) en développant le produit vectoriel entre les composantes.

Le résultat d'un produit vectoriel est un **VECTEUR**.

Rappel d'Analyse

Dérivée simple

Soit une fonction y = f(x),

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

dx est la différentielle de x
La derivée est la pente de la tangente à la courbe $f(x)$ au point x.

Rappels

$$\begin{aligned}
\left(f(x)+g(x)\right)' &= f'(x)+g'(x) \\
\left(f(x)g(x)\right)' &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\
\left(f^m(x)\right)' &= mf^{m-1}(x)f'(x) \\
\left(e^{f(x)}\right)' &= f'(x)e^{f(x)}
\end{aligned}$$

Page d'accueil
Page de Titre
Page 11 de 46
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Dérivées d'une fonction à plusieurs variables

Soit maintenant une fonction à plusieurs variables $f(x_1, x_2, x_3, ...)$. Une **dérivée partielle** de f par rapport à la variable x_i est obtenue en dérivant f par rapport à x_i et en maintenant les autres variables x_j constantes.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

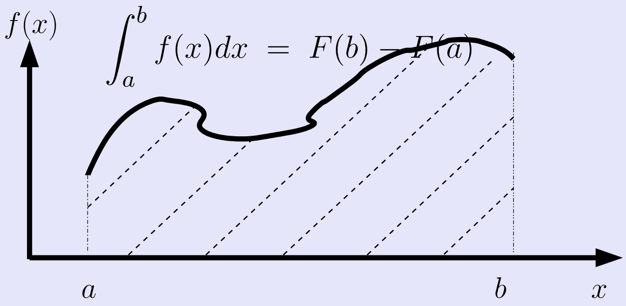
représente alors le taux de variation de f le long de la direction définie par la direction x_i.

Exercice: Calculer les dérivées partielles de la fonction $f(r, \theta, \phi) = B \sin\theta \ \cos^2\phi$ où B est une constante.

Primitives et intégrales

On appelle primitive d'une fonction $f(x)$ une fonction $F(x)$ telle que f soit la dérivée de F.

Par exemple $f(x) = \cos(x)$, $F(x) = \sin(x) + C$ où C est une constante d'intégration; F est définie à une constante près.



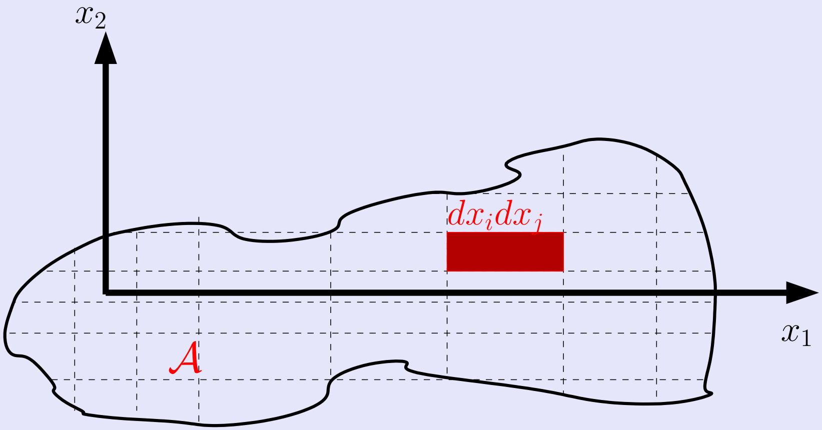
Physiquement, l'intégrale ci-dessus est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la fonction f entre $x = a$ et $x = b$.
On peut aussi réécrire

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \sum_{i=1}^{N} f(x_i)dx$$

où dx est infiniment petit.

Intégrale de surface (double)

On a maintenant à intégrer une surface dans un repère cartésien. On découpe alors la surface en une infinité de petits éléments de surface $dx_i dx_j$.



$$\int\int_{\mathcal{A}} dx_1 dx_2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} dx_i dx_j$$

Intégrale de volume (triple)

On a maintenant à intégrer un volume dans un repère cartésien. On découpe alors le volume en une infinité de petits éléments de volume $dx_i dx_j dx_k$.

$$\int\int\int_{\mathcal{V}} dx_1 dx_2 dx_3 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{L} dx_i dx_j dx_k$$

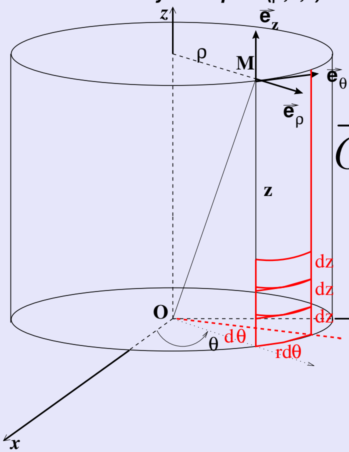
On sera souvent amener à calculer des intégrales simples, doubles, triples, en coordonnées cartésiennes, cylindriques & sphériques.

Comment écrit-on alors dans ces différents systèmes de coordonnées les éléments simples de longueur, de surface, de volume ? .

Coordonnées CARTESIENNES: $dl = dx$, $dS = dxdy$, $dV = dxdydz$. (cf TD).

Coordonnées CYLINDRIQUES:

Coordonnées Cylindriques **(ρ,θ,*z*)**



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \rho \overrightarrow{\mathrm{e}}_{\rho} + \mathrm{z}\,\overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}} \\
dl &= d\rho \text{ ou } dl = \rho d\theta \text{ ou } dl = dz \\
dS &= d\rho\, dz \text{ ou } dS = \rho\, d\theta\, dz \text{ ou } dS = d\rho\, \rho\, d\theta \\
dV &= d\rho\, \rho\, d\theta\, dz = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz
\end{aligned}
$$

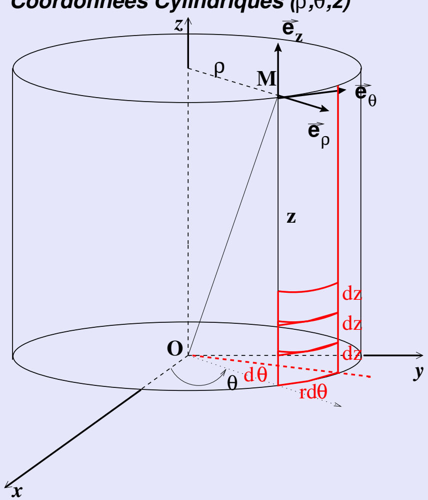
Exercice:

1) Calculer le périmètre d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R (intégrale simple).

2) Calculer l'aire d'un disque $\mathcal{D}$ de rayon R (intégrale double de surface).

3) Calculer le volume d'un cylindre $\mathcal{V}$ de rayon R et de hauteur H (intégrale triple de volume).

Algèbre
cartésiennes
cylindriques
sphériques
Produit scalaire
Produit vectoriel
Analyse
Intégrale 2D et 3D
Les Champs
Gradient
Divergence
Rotationnel
Helmholtz
Laplacien
Circulation
Flux
Green-Ostrogradsky
Stokes
Page d'accueil
Page de Titre
Page 14 de 46
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter



Exercice:

1) Calculer le périmètre d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R (intégrale simple).

On a $dl = Rd\theta$ d'où

$$\mathcal{C} = \int_0^{2\pi} R\, d\theta = 2\pi R.$$

2) Calculer l'aire d'un disque $\mathcal{D}$ de rayon R (intégrale double de surface).

On a $dS = d\rho\rho d\theta$ d'où

$$\mathcal{D} = \iint_S \rho d\rho d\theta = \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} = \pi R^2$$

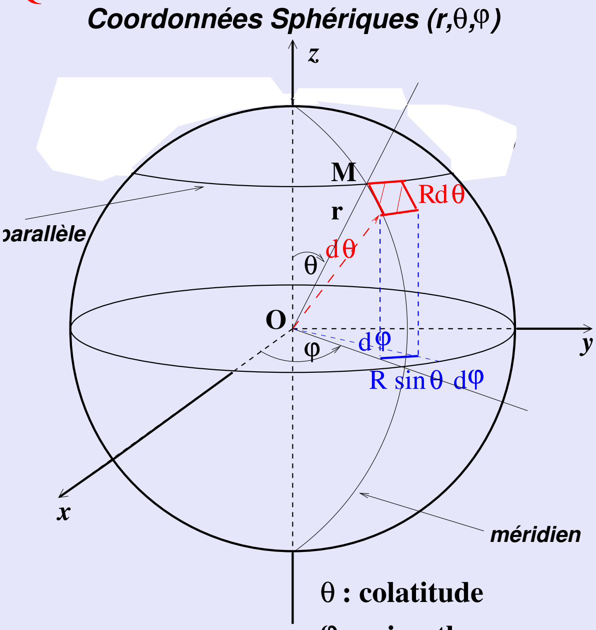
3) Calculer le volume d'un cylindre $\mathcal{V}$ de rayon R et de hauteur H (intégrale triple de volume).

On a $dV = d\rho\rho d\theta dz$ d'où

$$\mathcal{V} = \iiint_V \rho d\rho d\theta dz = \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^H = \pi R^2 H$$

Page d'accueil
Page de Titre
Page 15 de 46
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Coordonnées SPHERIQUES:

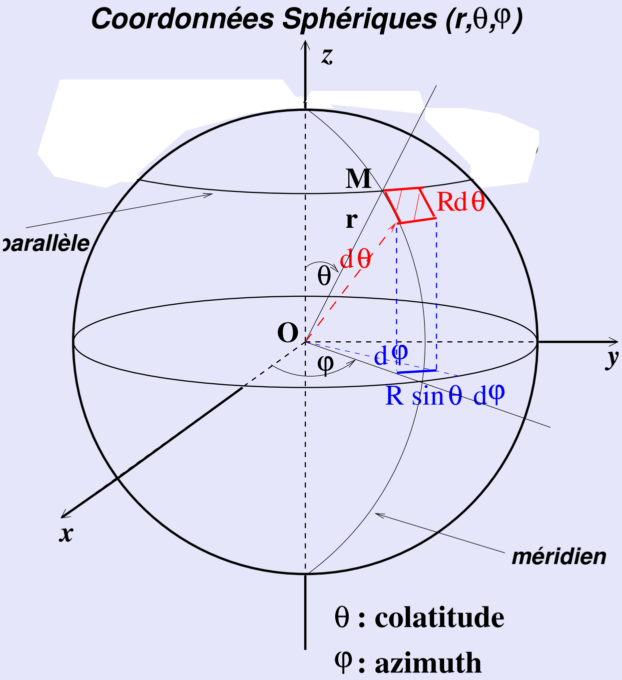


$$\overrightarrow{OM} = r\mathbf{e}_r$$
$$dl = dr \text{ ou } dl = rd\theta \text{ ou } dl = r\sin\theta d\varphi$$
$$dS = dr\ r\ d\theta \text{ ou } dS = dr\ r\ \sin\theta d\varphi \text{ ou } dS = r\ d\theta\ r\ \sin\theta d\varphi$$
$$dV = dr\ r\ d\theta\ r\ \sin\theta d\varphi = r^2\ \sin\theta dr\ d\theta d\varphi$$

Exercice:

1) Calculer l'aire d'une demi-sphère $\mathcal{D}$ de rayon R (sans le disque horizontal) (intégrale double de surface).

3) Calculer le volume d'une sphère $\mathcal{V}$ de rayon R (intégrale triple de volume).



Exercice:

1) Calculer l'aire d'une demi-sphère $\mathcal{D}$ de rayon R (sans le disque horizontal) (intégrale double de surface).

On a $dS = Rd\theta R\sin\theta d\varphi$ d'où

$$\mathcal{D} = \iint_S R^2 \ \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\mathcal{D} = R^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = 2\pi R^2$$

3) Calculer le volume d'une sphère $\mathcal{V}$ de rayon R (intégrale triple de volume).

On a $dV = dr\ r\ d\theta\ r\ \sin\theta\ d\varphi$ d'où

$$\mathcal{V} = \iiint_V r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3}\ 2\ 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Algèbre
cartésiennes
cylindriques
sphériques
Produit scalaire
Produit vectoriel
Analyse
Intégrale 2D et 3D
Les Champs
Gradient
Divergence
Rotationnel
Helmholtz
Laplacien
Circulation
Flux
Green-Ostrogradsky
Stokes
Page d'accueil
Page de Titre
Page 17 de 46
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Les champs en physique.

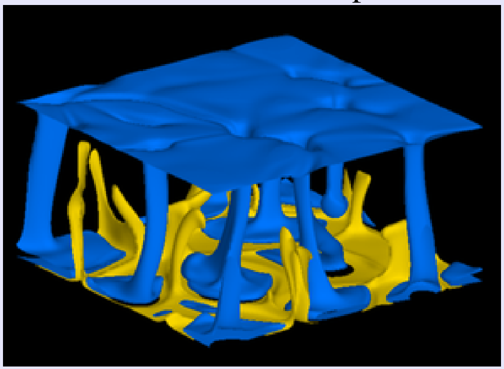
Définition. Lorsque dans une région de l'espace, on a attaché à chaque point une grandeur scalaire $(C(\overrightarrow{X}, t)$ ou vectorielle $(\overrightarrow{C}(\overrightarrow{X}, t)$, on a défini ce qu'on appelle un ***champ*** (respectivement scalaire ou vectoriel).

Region concernée + Conditions limites.
pause

Champ stationnaire en temps, champ uniforme en espace.

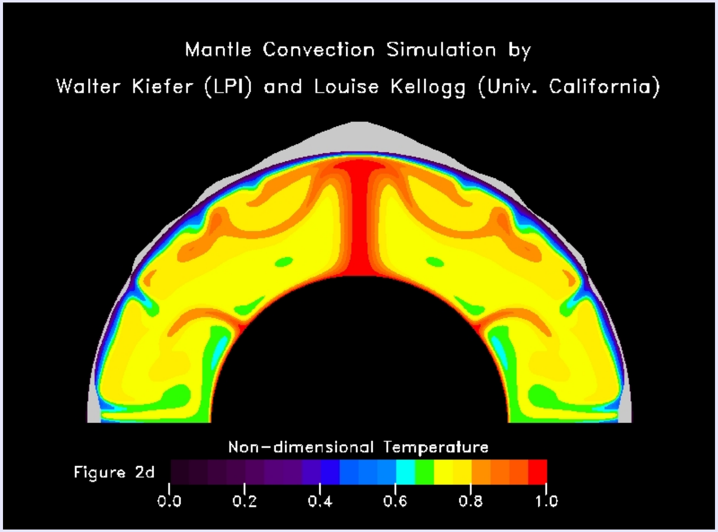
Exemples

☞ Le champ de température **SCALAIRE**, $T(\overrightarrow{X}, t)$.
Calcul numérique dans un parallélépipède avec chauffage par le bas ($Ra = 10^7$), avec chauffage interne ($H = 20$, sans dimension). Deux iso-surfaces de température sont représentées, une chaude et une froide, pour visualiser les courants ascendant et descendant au cours du temps.



Labrosse (2000)

Une autre façon de représenter le champ de température SCALAIRE $T(\overrightarrow{X}, t)$ est de représenter le champ total, ici dans une simulation de la convection dans le manteau terrestre.

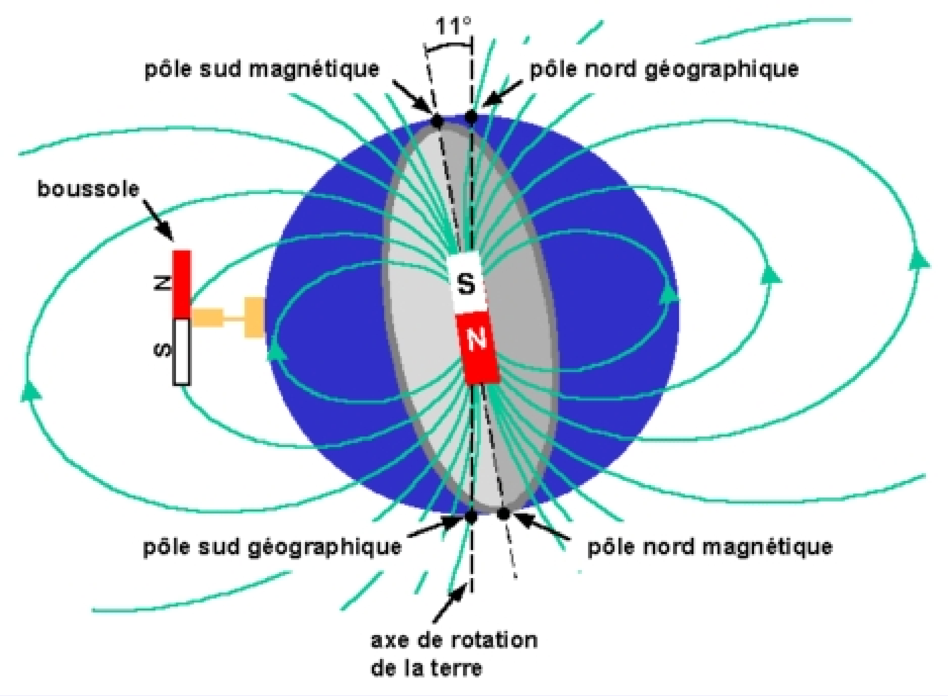


☞ A noter que le flux de chaleur est VECTORIEL, le flux emprunte une direction donnée, $\overrightarrow{q}\left(\overrightarrow{X,t}\right)$.

☞ Le champ de pression est également un champ SCALAIRE, $P\left(\overrightarrow{X}, t\right)$.

☞ Le champ de gravité est un champ VECTORIEL $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{X}, t)$. En tout point un objet lâché tombera en suivant la direction locale du champ de gravité!

☞ Le champ magnétique $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{X}, \mathrm{t})$ VECTORIEL.



Opérateurs mathématique

Un des enjeux principaux de l'U.E. TUE302 est d'apprendre à utiliser les opérateurs scalaires et vectoriels destinés à caractériser un champ physique ou géophysique.

Exemple: On a un champ de vitesse donné $\overrightarrow{U}(\overrightarrow{X}, t)$. On verra dans la suite du cours que si div $\overrightarrow{U}$ =0 alors le fluide que l'on considère est incompressible. La divergence div est une opération mathématique à base de dérivées de fonction à plusieurs variables.

On va introduire les opérateurs suivant: $\overrightarrow{\text{grad}}$, div, $\overrightarrow{\text{rot}}$, Δ, etc...

Les dérivées premières

Gradient scalaire

Soit un champ scalaire f($\overrightarrow{X}$,t)=f(x,y,z,t) .
par exemple: $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta\, x \to 0} \frac{f(x+dx,y,z,t) - f(x,y,z,t)}{\Delta\, x}$

$\rightarrow$ Dérivée totale:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Différentielle(variation de f quand M(x,y,z) $\rightarrow$ M(x+dx, y+dy, z+dz) à un temps t constant:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

or le vecteur déplacement infinitésimal s'écrit

$$\overrightarrow{dM} = dx\overrightarrow{e}_x + dy\overrightarrow{e}_y + dz\overrightarrow{e}_z$$

$\rightarrow$ $\boxed{df = \overrightarrow{\text{grad}}\ f \cdot \overrightarrow{dM}}$ d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\ \overrightarrow{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\ \overrightarrow{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\ \overrightarrow{e}_z}$$

définition du GRADIENT scalaire en coordonnées cartésiennes

L'opérateur gradient scalaire

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \overrightarrow{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \overrightarrow{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{e}_z$$

Le gradient quantifie les variations de f selon les 3 coordonnées (x, y, z).

$\overrightarrow{\text{grad}} f$ pointe dans la direction où la variation d'amplitude est max.

Exemple: Si on a une carte topographique avec des lignes de niveaux, le vecteur gradient pointe dans la direction où les lignes de niveaux sont le plus rapprochées, dans la direction de plus grande pente.

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}\ f \cdot \overrightarrow{dM} = |\ \overrightarrow{\text{grad}}\ f\ |\ |\ \overrightarrow{dM}\ |\ \cos\theta$$

☞ Si on se déplace parallèlement au gradient $(\cos\theta = 1)$, on maximise les variations de f.

☞ Si on suit une ligne d'isovaleur ($df = 0$), alors la définition ci-dessus nous indique qu'on se déplace perpendiculairement au vecteur gradient de la fonction f.

$\overrightarrow{\text{grad}} f$ est perpendiculaire aux lignes de niveaux.

La divergence d'un vecteur

Soit un vecteur $\overrightarrow{A} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

Par définition, la divergence du vecteur $\overrightarrow{A}$ en coordonnées cartésiennes s'écrit:

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Le résultat de la divergence d'un vecteur est un SCALAIRE.

La divergence caractérise comment un champ évolue dans sa propre direction car cet opérateur fait intervenir des dérivées partielles non-croisées (par exemple $\frac{\partial A_x}{\partial x}$).

Si $\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} \neq 0$ alors on dit que le champ possède une *source* ou un *puits* de champ, il est dit à flux non-conservatif (voir les exemples plus loin).

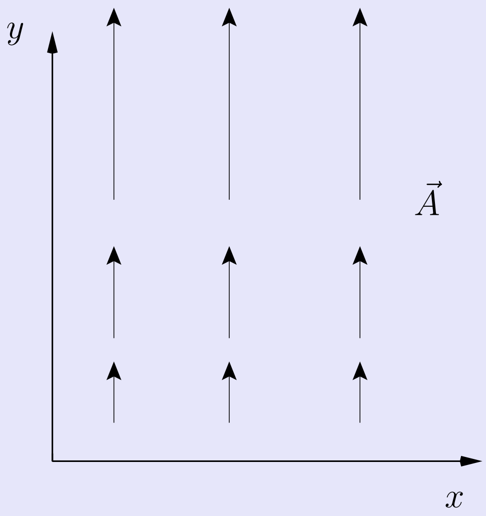
Si $\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = 0$, le flux est dit à champ conservatif, il est dit solenoïdal.

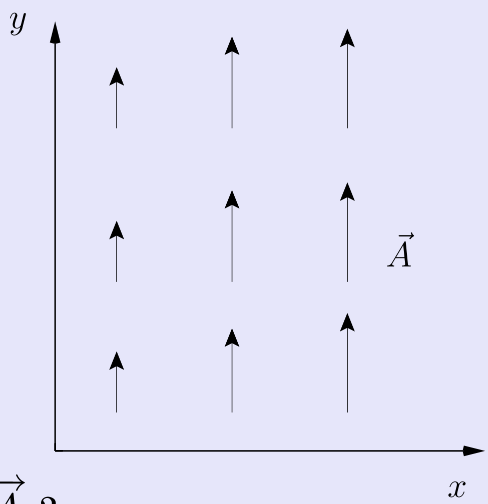
La divergence d'un vecteur

Par définition, la divergence du vecteur $\overrightarrow{A}$ en coordonnées cartésiennes s'écrit:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Exemples





$\operatorname{div} \overrightarrow{A}$?

Algèbre
cartésiennes
cylindriques
sphériques
Produit scalaire
Produit vectoriel
Analyse
Intégrale 2D et 3D
Les Champs
Gradient
Divergence
Rotationnel
Helmholtz
Laplacien
Circulation
Flux
Green-Ostrogradsky
Stokes
Page d'accueil
Page de Titre
Page 25 de 46
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Le rotationnel d'un vecteur

Soit un vecteur $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

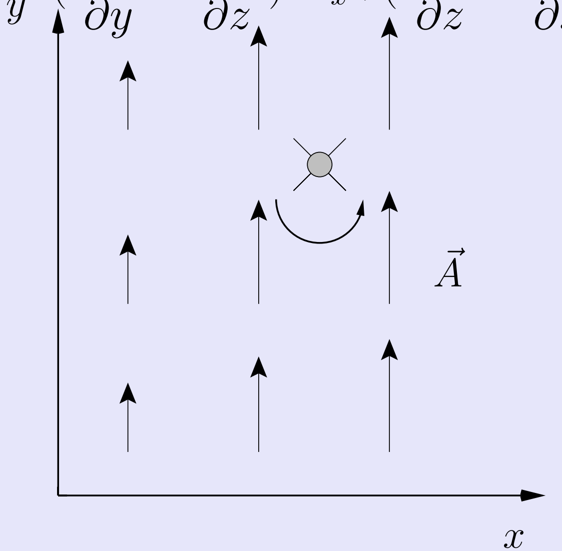
Par définition, le rotationnel du vecteur $\overrightarrow{A}$ en coordonnées cartésiennes s'écrit:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})\overrightarrow{e}_x+(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})\overrightarrow{e}_y+(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})\overrightarrow{e}_z$$

Le résultat du rotationnel d'un vecteur est un VECTEUR.

Le rotationnel fait intervenir les les dérivées partielles croisées d'un champ de vecteur $\left(\text{par exemple } \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$. Il caractérise le *cisaillement* d'un champ de vecteur.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e}_z$$



Gradient, Divergence et Rotationnel

On a vu la définition de ces trois opérateurs en coordonnées cartésiennes.

Le gradient d'un champ scalaire caractérise les **variations** et la direction vers laquelle se font les variations maximales.

La divergence et le rotationnel d'un champ vectoriel caractérisent l'évolution du champ vectoriel dans **sa propre direction** et **transversalement**, respectivement. Ces deux opérateurs sont complémentaires pour décrire un champ de vecteurs.

Toutes ces opérations se retrouvent dans tous les systèmes de coordonnées, en particulier les coordonnées cylindriques et sphériques. Voir formulaire distribué et TD ②.

Décomposition de Helmholtz

Théorème (simplifié) de décomposition de Helmholtz. Tout champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ (moyennant des conditions de régularité à l'∞) peut se décomposer en

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\textbf{grad}}\phi + \overrightarrow{\textbf{rot}}\,\overrightarrow{\Psi}$$

ϕ est par définition le **potentiel scalaire** et $\overrightarrow{\Psi}$ le **potentiel vecteur**.On choisit en général Ψ tel que div $\overrightarrow{\Psi} = 0$.

▷ On dit qu'un champ est solénoïdal ou à flux conservatif lorsque div $\overrightarrow{A} = 0$. Dans cette décomposition, on peut alors écrire

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\Psi} \text{ car div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}) = 0 \quad \forall \overrightarrow{A}$$

▷ On dit qu'un champ est irrotationnel lorsque $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = 0$. Dans la décomposition de Helmholtz, on peut alors écrire

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi \text{ car } \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\phi) = 0 \quad \forall \phi$$

Applications: sismologie, magnétisme, mécanique, etc...

Les dérivées secondes

Laplacien scalaire

Soit un champ scalaire f($\overrightarrow{X}$)=f(x,y,z).
Par définition le **laplacien** d'un champ scalaire est

$$\Delta f = \nabla^2 f = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Le laplacien interviendra dans tous les problèmes de diffusion: diffusion de la chaleur, diffusion d'un concentré chimique, diffusion de la quantité de mouvement, etc...

Les opérateurs vectoriels

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f$$

$$\mathrm{div}\, \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\Delta f = \nabla^2 f$$

(∇ notation anglo-saxonne)

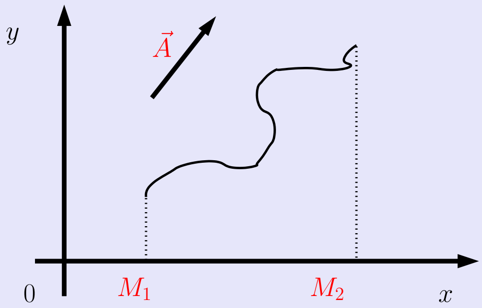
Les relations intégrales

Circulation d'un vecteur

Soit un champ de vecteur $\overrightarrow{A}$ donné défini dans un espace donné. On se donne un chemin délimité par deux points M_1 et M_2. Ce chemin est découpé en une infinité de vecteurs infinitésimaux $\overrightarrow{dM}$.

Par définition, la circulation de $\overrightarrow{A}$ entre M_1 et M_2 est:

$$\mathcal{C}_{M_1 M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dM}$$



Circulation d'un vecteur

$$\mathcal{C}_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dM}$$

Dans notre cours, on aura souvent $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$. On dit que le champ $\overrightarrow{A}$ dérive du **potentiel scalaire** f si en tout point M du domaine $\mathcal{D}$ la relation

$$\overrightarrow{A}(M) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M)$$

est vérifiée.

$$\longrightarrow$$

$$\mathcal{C}_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{M_1}^{M_2} df = f(M_2) - f(M_1)$$

La circulation du vecteur $\overrightarrow{A}$ est alors indépendante du chemin choisi, puisque ne dépendant que du point de départ et du point d'arrivée. Dans le cas particulier ou l'on intègre sur un contour fermé, on a

$$\oint \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dM} = 0$$

Circulation d'un vecteur

Exercice: Calculer la circulation du champ vectoriel $\overrightarrow{A}(M) = \rho\overrightarrow{e}_\theta$ (coordonnées cylindriques) le long d'un cercle $\mathcal{C}_R$ de rayon R situé sur le plan horizontal (Oxy).

$$\mathcal{C}_{\mathcal{C}_R} = \int_{\mathcal{C}_R} \overrightarrow{A}(M) \cdot \overrightarrow{dM}$$

$$\overrightarrow{dM} = Rd\theta\overrightarrow{e}_\theta$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{C}_R} = \int_{\mathcal{C}_R} \rho\overrightarrow{e}_\theta \cdot Rd\theta\overrightarrow{e}_\theta$$

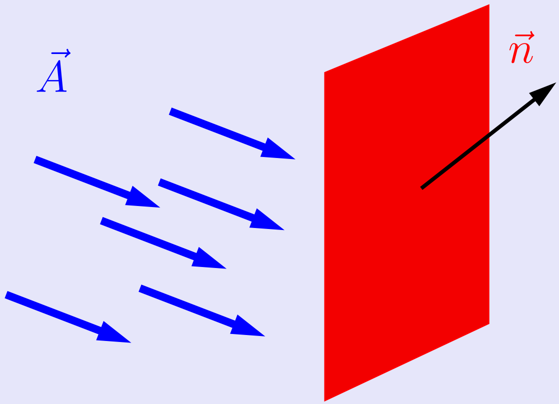
$$\mathcal{C}_{\mathcal{C}_R} = \int_0^{2\pi} R^2 d\theta$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{C}_R} = 2\pi R^2$$

Flux vectoriel

Par définition, le flux du champ de vecteur $\overrightarrow{A}$ à travers une surface dont le vecteur unitaire normal à la surface s'écrit $\overrightarrow{n}$ est:

$$\Phi = \iint\limits_S \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint\limits_S \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$



Dans cette notation, on a $\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{n}\, dS$.

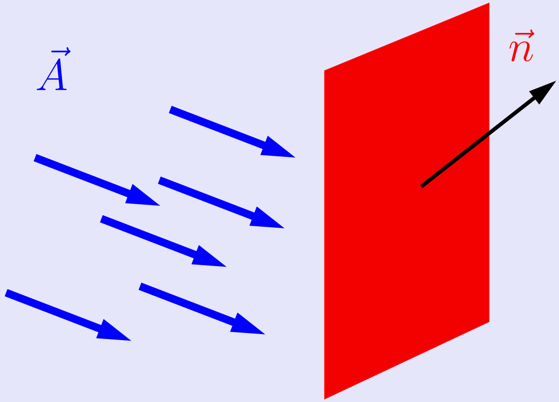
Le flux correspond à la quantité intégrée du champ de vecteur $\overrightarrow{A}$ *traversant* la surface S.

$\longrightarrow$ La seule composante de $\overrightarrow{A}$ qui va intervenir dans le flux est la composante parallèle à $\overrightarrow{n}$, puisque la composante perpendiculaire à la surface ne peut la traverser.

Mathématiquement, la composante parallèle est

$$\overrightarrow{A}_{//} = (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{A}_{\perp} = \overrightarrow{A} - (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$$



Flux vectoriel

Exercice: Calculer le flux du champ électrostatique généré par une charge q unique à travers une sphère de rayon R. On rappelle que le champ électrostatique s'écrit $\overrightarrow{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\overrightarrow{e}_r$ où r est la distance à la charge. Démontrer que le flux est indépendant du rayon R.

$$\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \oiint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0\, R^2}\overrightarrow{e}_r \cdot R^2 d\theta \sin\theta d\varphi \overrightarrow{e}_r$$

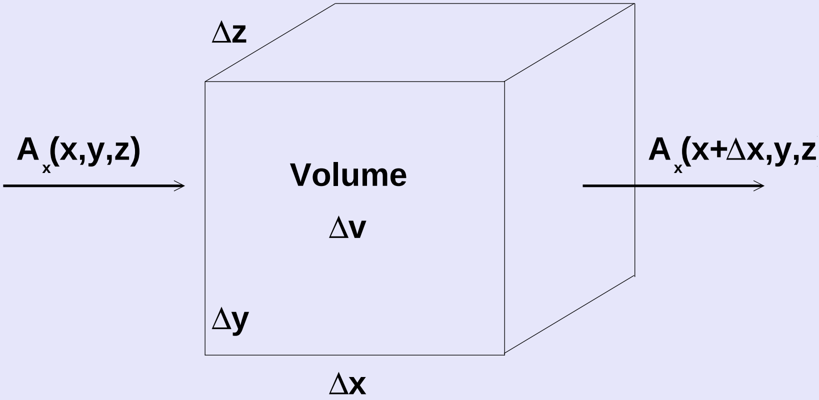
$$\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\pi \sin\theta d\theta\, [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}[-\cos\theta]_0^\pi\, 2\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

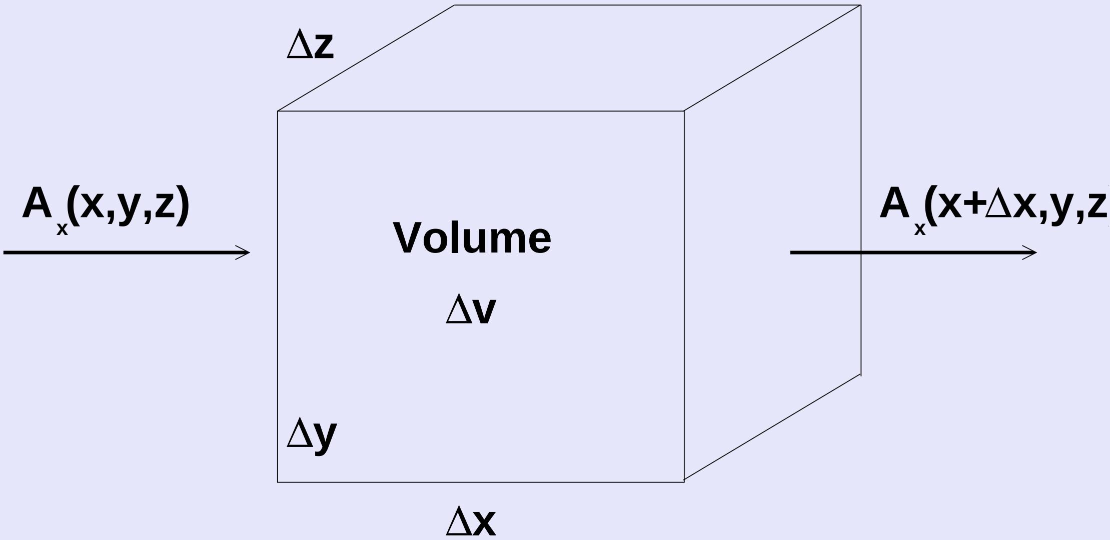
Théorème de Green-Ostrogradsky

Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ défini dans un espace donné. On veut calculer le flux Φ du vecteur $\overrightarrow{A}$ à travers une surface fermée.
Pour la démonstration, on choisit comme surface S, la surface d'un cube infinitésimal de côté Δx, Δy, et Δz.

$$\Phi = \oiint_S \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{S}$$



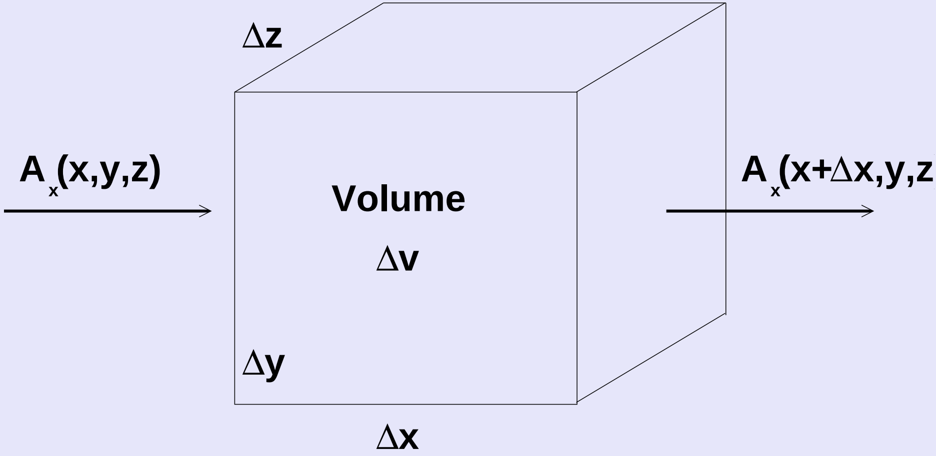
$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi_x &= A_x(x+\Delta x, y, z)\Delta y\Delta z - A_x(x,y,z)\Delta y\Delta z\\
\Leftrightarrow \Delta\Phi_x &= \left(\frac{A_x(x+\Delta x, y, z) - A_x(x,y,z)}{\Delta x}\right)\Delta x\Delta y\Delta z\\
&\rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta V \;\text{ si } \Delta x \rightarrow 0
\end{aligned}
$$



Page d'accueil
Page de Titre
Page 39 de 46
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Théorème de Green-Ostrogradsky

$$\Phi = \oiint_S \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{S}$$



$$\Delta\Phi_x \to \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta V \quad \text{si } \Delta x \to 0$$

$$\Delta\Phi_y \to \frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta V \quad \text{si } \Delta y \to 0$$

$$\Delta\Phi_z \to \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta V \quad \text{si } \Delta z \to 0$$

Théorème de Green-Ostrogradsky

$$\Phi = \oiint_S \overrightarrow{A} \cdot d\,\overrightarrow{S}$$

En sommant les contribution des 3 faces:

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_x + \Delta\Phi_y + \Delta\Phi_z = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta V = \operatorname{div}\overrightarrow{A}\,\Delta V$$

d'où finalement en intégrant:

$$\iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{A}\,dV = \oiint_S \overrightarrow{A} \cdot d\,\overrightarrow{S}$$

Théorème de Green-Ostrogradsky

On a démontré en coordonnées cartésiennes:

$$\iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{A}\, dV = \oiint_S \overrightarrow{A} \cdot d\,\overrightarrow{S}$$

(On aurait pu faire la démonstration en coordonnées cylindriques, etc...)

On en conclut: **La divergence d'un vecteur est le flux extérieur d'un champ de vecteur par unité de volume.**

Ce théorème permet de passer d'une intégrale volumique à une intégrale surfacique (beaucoup utilisé).

Page d'accueil
Page de Titre
Page 42 de 46
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Signification physique de la divergence

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \overrightarrow{A}\, dV = \oiint\limits_S \overrightarrow{A} \cdot d\,\overrightarrow{S}$$

La divergence d'un vecteur est le flux extérieur d'un champ de vecteur par unité de volume.

Des exemples

- ✓ Écoulement d'eau incompressible. Bilan nul du flux d'eau à travers un volume. $\operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$.
- ✓ Source de champ électrostatique dans le cas d'une charge isolée. $\operatorname{div} \overrightarrow{E} \neq 0$
- ✓ Champ magnétique à flux conservatif, une ligne de champ se referme toujours sur elle-même: $\operatorname{div} \overrightarrow{B} = 0$

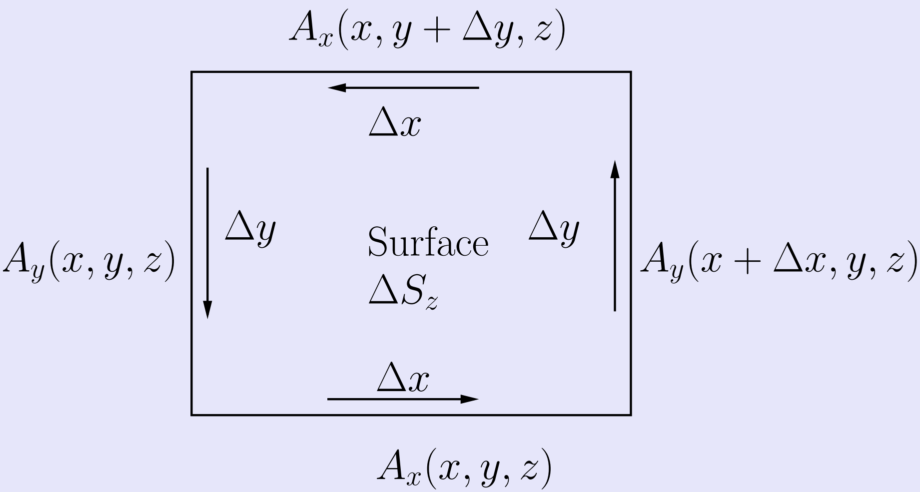
Dès que l'on une source ou un puits de champ vectoriel, la divergence de ce champ est non nulle... il diverge!

Théorème de Stokes

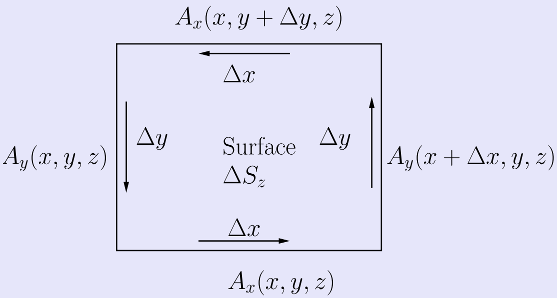
Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ défini dans un espace donné. On veut calculer la circulation du vecteur $\overrightarrow{A}$ autour d'un contour fermé $\mathcal{L}$.

$$\oint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{A} \cdot d\,\overrightarrow{l}$$

On choisit comme contour $\mathcal{L}$ le contour d'un rectangle infinitésimal de côté $(\Delta x, \Delta y)$.



TUE 302
Algèbre
cartésiennes
cylindriques
sphériques
Produit scalaire
Produit vectoriel
Analyse
Intégrale 2D et 3D
Les Champs
Gradient
Divergence
Rotationnel
Helmholtz
Laplacien
Circulation
Flux
Green-Ostrogradsky
Stokes
Page d'accueil
Page de Titre
Page 44 de 46
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter



Pour les deux côtés horizontaux, la contribution est

$$A_x(x,y,z)\Delta x - A_x(x,y+\Delta y,z)\Delta x \longrightarrow$$

$$\frac{A_x(x,y,z)\Delta x\Delta y - A_x(x,y+\Delta y,z)\Delta x\Delta y}{\Delta y} \to -\frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta S_z$$

De même pour les faces verticales:

$$\left(\oint_{\Delta\mathcal{L}} \overrightarrow{A}\cdot d\,\overrightarrow{l}\right)_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta S_z = \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\right)_z \Delta S_z$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{A}\cdot d\,\overrightarrow{l} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\cdot d\,\overrightarrow{S}$$

TUE 302
Algèbre
cartésiennes
cylindriques
sphériques
Produit scalaire
Produit vectoriel
Analyse
Intégrale 2D et 3D
Les Champs
Gradient
Divergence
Rotationnel
Helmholtz
Laplacien
Circulation
Flux
Green-Ostrogradsky
Stokes
Page d'accueil
Page de Titre
Page 45 de 46
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Théorème de Stokes

On a démontré en coordonnées cartésiennes:

$$\oint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{A} \cdot d\,\overrightarrow{l} = \iint_{S} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} \cdot d\,\overrightarrow{S}$$

La circulation du vecteur $\overrightarrow{A}$ sur un parcours fermé $\mathcal{L}$ est égale au flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$ à travers une surface quelconque s'appuyant sur $\mathcal{L}$.

Ce théorème permet de passer d'une intégrale simple à une intégrale surfacique (couramment utilisé).