Licence 3 – Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement

Université Joseph-Fourier

TUE 302 : Outil Physique et Géophysique

④ Magnétostatique

Daniel.Brito@ujf-grenoble.fr
Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique,
Maison des Géosciences,
BP53, 38041 Grenoble Cedex 09,
☎ 04 76 82 80 42.

Jusqu'à présent, charges électriques stationnaires (électrostatique). Désormais les charges sont **libres** de se mouvoir sous l'action de forces extérieures.

2 classes de matériaux. Les atomes voisins assurent toujours la cohésion du solide ... mais les interactions entres atomes peuvent être très différentes :

- ✓ **isolant électrique** : très peu de déplacement des atomes autour de leur position moyenne (pas de transport de charges).
- ✓ **conducteur d'électricité** : déplacement d'électrons sur de grandes distances. Par définition, un conducteur est un corps dans lequel existe des charges qui peuvent se mouvoir librement à l'intérieur de tout le volume.

Circulation de charges $\longrightarrow$ courant électrique.

Définition : $I = \dfrac{dQ}{dt} =$ variation de quantité de charges par unité de temps .

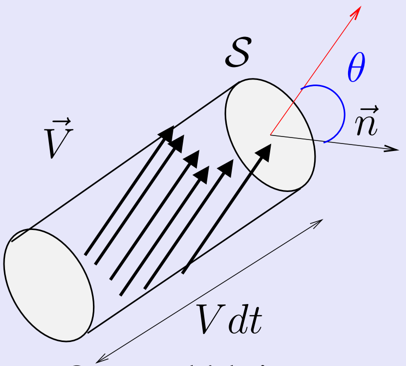
Exemple d'un fil conducteur :

Considérons une quantité de charge mobile dont la densité de charge est $\rho = \rho_{\text{mobile}}$.

Chaque charge est animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$.

A l'équilibre électrostatique, $\langle \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{0}$ pour l'ensemble des charges.

S'il existe un mouvement d'ensemble des charges, on définit une moyenne $\langle \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{V}$.



On cherche :

ΔQ = quantité de charge traversant la surface $\mathcal{S}$ en un temps court dt = flux.

$\Delta Q = \rho \overrightarrow{V}\,dt \cdot \mathcal{S}\overrightarrow{n}$

Unités : C = (C/m^3)$\cdot$ m/s $\cdot$ s $\cdot$ m^2 = C

Or

$$\Delta Q = I\Delta t$$

On en déduit

$$I = \rho \mathcal{S} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{\mathcal{S}}\,\overrightarrow{J} \text{ où } \overrightarrow{J} = \rho \overrightarrow{V}.$$

Par définition, on appelle le courant électrique I, la quantité de charge qui traverse en moyenne une section quelconque du fil par unité de temps . Unités : $[I] = [Q]/[t] \Leftrightarrow [Q] = [I][t] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s} = C$.

$[J] = [I]/[S] = $ A/ m^2.

Le courant électrique

Par définition, on appelle **COURANT ÉLECTRIQUE** I, la quantité de charge qui traverse en moyenne une section quelconque du fil par unité de temps.

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{dS}$$

où $\overrightarrow{J} = \rho \overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{J}$ **est LA DENSITÉ DE COURANT ÉLECTRIQUE** en Ampère par mètre carré, ρ est la densité de charge volumique et $\overrightarrow{V}$ est la vitesse des particules en mouvement.

Relation de continuité

Soit une surface $\mathcal{S}$ délimitant un volume $\mathcal{V}$. Des charges électriques négatives (électrons) pénètrent le volume et la charge totale Q contenue dans le volume $\mathcal{V}$ diminue. On a

$$\frac{\partial Q}{\partial t} < 0$$

et par définition,

$$I = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{dS} = -\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = I = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{dS} \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho dV = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \overrightarrow{J}\, dV$$

$$\rightarrow \operatorname{div} \overrightarrow{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

dans le cas de la **magnétostatique** :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{J} = 0$$

pas d'accumulation de charge, courant continu.

Loi d'Ohm

Supposons un flux continu de charges, en présence d'une accélération des charges soumis au champ électrique $\overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$. La **loi d'Ohm** nous dit que la différence de potentiel électrique entre deux points vaut la résistance du milieu multipliée par le courant I:

$$\Delta V = I\ R$$

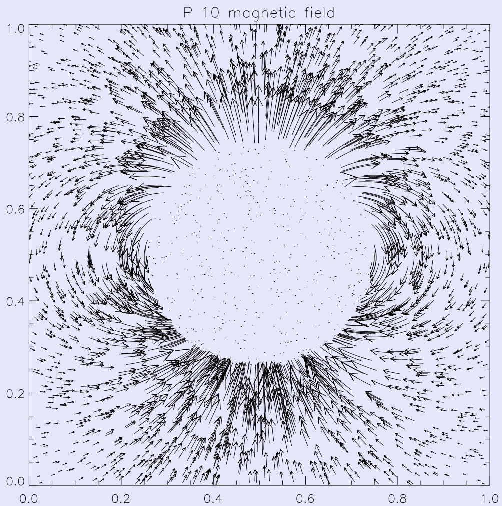
avec $R = \rho^* \dfrac{L}{S}$ la résistance du fil en Ohm, où ρ^* est la résistivité du fil, L est la longueur du fil et S est la section circulaire du fil considéré.
On définit aussi $\sigma = \dfrac{1}{\rho^*}$ la conductivité en $(\text{Ohm m})^{-1}$.
On a toujours $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ avec $\overrightarrow{E}$ le champ électrique $\left(\int_{\mathcal{L}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{\mathcal{L}} -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \overrightarrow{dl} = -dV\right)$.
On en déduit une relation entre $\overrightarrow{J}$ et $\overrightarrow{E}$:

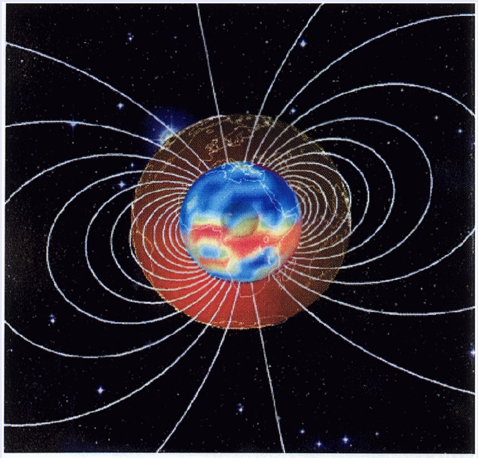
$$\Delta V = IR \Leftrightarrow EL = I\rho^*\frac{L}{S} \Leftrightarrow \rho^*\frac{I}{S} = \rho^* J = E \Leftrightarrow J = \frac{E}{\rho^*} = \sigma E$$

Dans un fil, $\overrightarrow{J} = \sigma\overrightarrow{E}$.

Interactions électromagnétiques

- ✓ Interactions électrostatiques: $\longrightarrow$ champ électrostatiques $\overrightarrow{E}$
- ✓ Interactions gravitationnelles: $\longrightarrow$ champ gravitationnel $\overrightarrow{g}$
- ✓ Objet de ④ : interactions électromagnétiques $\longrightarrow$ champ magnétique $\overrightarrow{B}$ généré par des charges en mouvement.





Forces de Laplace

Placées dans un champ magnétique, des charges immobiles ne subissent pas d'action mais dès qu'elles sont en mouvement

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}),$$

pour une charge ponctuelle.

$$\overrightarrow{F} = \int_{\mathcal{L}} i\,\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B},$$

pour un fil conducteur.

$$\overrightarrow{F} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \overrightarrow{J} \wedge \overrightarrow{B}\,dV,$$

pour un volume conducteur d'électricité .

$\overrightarrow{B}$ champ magnétique, $[\overrightarrow{B}]$ = T (Tesla), 1 G (Gauss) = 10^{-4} T.

Champ magnétique + électrique

Soit maintenant une particule chargée en mouvement **au sein d'un champ électrique et d'un champ magnétique** ; elle est soumise à **la force totale** :

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}).$$

Dans les problèmes à résoudre dans ④

- ✓ soit le **champ magnétique est imposé de l'extérieur** (voir TD ⑧).
- ✓ soit on **calcule le champ magnétique induit** par la circulation d'un courant (voir TD ⑨).

Comment calculer $\overrightarrow{B}$ généré par une circulation de charges ?

Biot et Savart

Soit une quantité de charge mobile $dq = \rho_m d\tau$ contenue dans le volume $d\tau$, animée de la vitesse $\overrightarrow{v}$. Cette quantité de charge crée en un point M situé à la distance $PM = r$ un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ (on suppose dans ce cours qu'on travaille dans le vide)(*postulat*) :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{r^3} \rho_m d\tau$$

En considérant un **circuit filiforme**,

$$\rho_m \overrightarrow{v} d\tau = \rho \overrightarrow{v}\ S\ dl = \rho\ v\ S \overrightarrow{dl} = i\ \overrightarrow{dl}$$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2},$$

d'où pour **un circuit complet**:

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{i \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2}$$

LOI DE BIOT ET SAVART

C'est la formule utilisée pour calculer le champ généré par un courant circulant dans un fil infiniment long. (règle de la main droite)

Biot et Savart

dans le cas d'un fil:

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{L}} \frac{i\,\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2}$$

dans le cas d'une charge isolée:

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} q\,\overrightarrow{v} \wedge \frac{\overrightarrow{u}}{r^2}$$

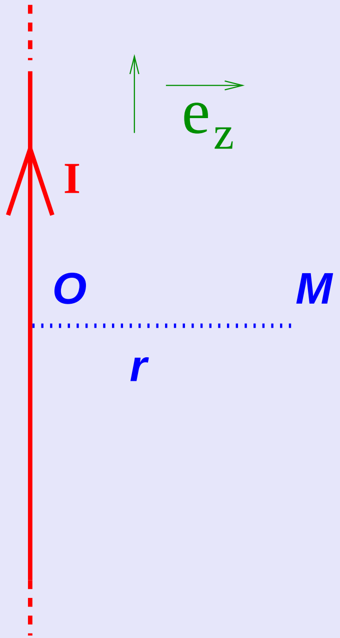
dans le cas d'un courant volumique:

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{J} \wedge \frac{\overrightarrow{u}}{r^2} dV$$

RÈGLES DE SYMÉTRIE:

- ✓ Lorsqu'on a un **PLAN DE SYMÉTRIE** pour la densité de courant $\overrightarrow{J}$, alors le champ magnétique induit $\overrightarrow{B}$ est **PERPENDICULAIRE À CE PLAN**.
- ✓ Lorsqu'on a un **PLAN D'ANTI-SYMÉTRIE** pour la densité de courant $\overrightarrow{J}$, alors le champ magnétique induit $\overrightarrow{B}$ est **CONTENU DANS CE PLAN**.

Equation de Maxwell



Soit un fil infiniment long parcouru par un courant dans la direction (Oz) : tout plan passant par (Oz) est un plan de symétrie. A l'aide de la règle de symétrie et de Biot et Savart pour un fil, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B}(M)_{(r,\theta,z)} &= f(r)\overrightarrow{e}_\theta \\
&= f(r)(\overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{OM}) \\
\longrightarrow \mathrm{div}\,\overrightarrow{B} &= 0 \quad \text{(équation de Maxwell)}
\end{aligned}$$

implique $$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

Champ $\overrightarrow{B}$ à flux conservatif, pas de monopole magnétique.

3 méthodes de calcul de $\overrightarrow{B}$

1) **Biot et Savart**, calcul direct.

2) Puisque $\operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0$, il existe un vecteur $\overrightarrow{A}$ tel que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{A}$. C'est le **POTENTIEL VECTEUR MAGNÉTIQUE**. Permet parfois de simplifier les calculs de champ (voir le calcul de $\overrightarrow{B}$ pour un dipole magnétique).

3) **Le théorème d'Ampère**.

Le théorème d’Ampère

En magnétostatique, on a des courants permanents, div $\overrightarrow{J} = 0$.

On peut poser (puisque $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{X}) = 0 \; \forall \overrightarrow{X}$)

$$\overrightarrow{J} = \frac{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}}{\mu_0}.$$

D’après le théorème de Stokes,

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_{S} \frac{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}}{\mu_0} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S} \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{dS} = I.$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I$$

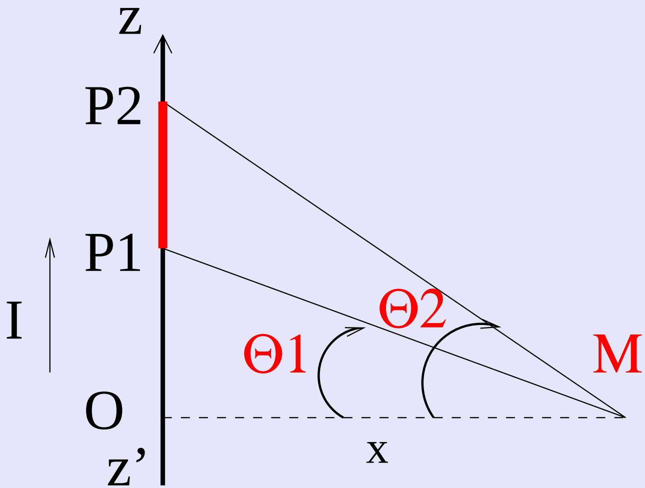
La circulation de $\overrightarrow{B}$ le long d’un contour fermé $\equiv \mu_0$ fois le courant I qui traverse la surface délimitée par le contour.

Exercice

Calcul du champ magnétique créé par un courant continu circulant dans un fil rectiligne.

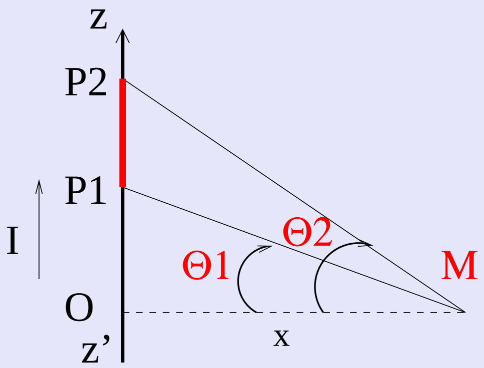
- ✓ par un calcul direct (Biot et Savart),
- ✓ par le théorème d'Ampère.

Énoncé:



D'un point M on voit deux points P_1 et P_2 d'un conducteur rectiligne parcouru par un courant d'intensité I sous les angles θ_1 et θ_2. On désignera par x la distance de M à l'axe du conducteur.

a) En utilisant la loi de Biot et Savart, définir le module et le sens du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé en M par le segment P_1P_2, longueur infinitésimal du conducteur situé sur l'axe $(z'z)$.



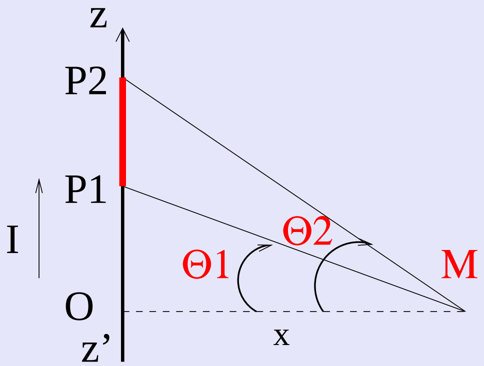
a) En utilisant la loi de Biot et Savart, définir le module et le sens du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé en M par le segment P_1P_2 longueur infinitésimal du conducteur situé sur l'axe $(z'z)$.

Symétries : Le plan de la feuille passant par M et contenant le fil est un plan de symétrie pour la distribution de courant considérée. On en déduit que le champ $\overrightarrow{B}(M)$ est perpendiculaire au plan de la feuille, donc orienté suivant $\overrightarrow{e_\phi}$ (on n'utilise pas $\overrightarrow{e_\theta}$ puisque la variable θ est déjà utilisée pour repérer le segment P_1P_2) en coordonnées cylindriques (repère centré en O, le projeté de M sur l'axe $(z'z)$).

Expression de Biot et Savart pour un fil : Via la règle de la main droite ou du *tire bouchon*, on sait que le champ magnétique pointe vers la feuille :
$\overrightarrow{B}(M) = B(M)\overrightarrow{e_\phi}$ avec $B(M) > 0$.
On applique la loi de Biot et Savart pour un circuit filiforme :

$$\overrightarrow{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \, \overrightarrow{dl} \wedge \frac{\overrightarrow{u}}{r^2}$$

Page d'accueil
Page de Titre
Page 16 de 40
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter



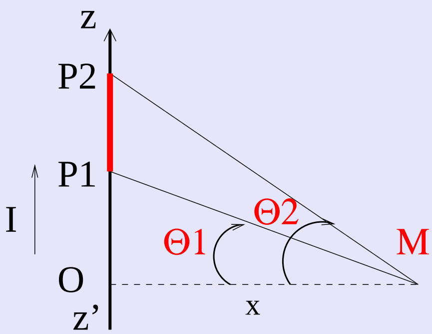
$$\overrightarrow{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I \,\overrightarrow{dl} \wedge \frac{\overrightarrow{u}}{r^2}$$

On se retrouve avec trois expressions variables à intégrer : $\overrightarrow{dl}$, $\overrightarrow{u}$ et r. Exprimons toutes ces variables en fonction de θ.

Considérons une longueur l du fil comptée à partir de O.
En fonction de θ, $l = x \ \tan\theta$, $dl = \dfrac{x}{\cos^2\theta}\, d\theta$, $r = \dfrac{x}{\cos\theta}$, l'angle entre $\overrightarrow{u}$ (vecteur unitaire pointant du milieu de $P_1\,P_2$ vers M) et $\overrightarrow{dl}$ est $\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)$.
On en déduit:

$$\begin{aligned}
dB_\phi(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\, I \,\overrightarrow{dl} \wedge \frac{\overrightarrow{u}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{dl}{r^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{dl}{r^2}\ \cos\theta \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{x}{\cos^2\theta}\,\frac{\cos^2\theta}{x^2}\cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\cos\theta}{x} d\theta \\
\Leftrightarrow B_\phi(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)
\end{aligned}$$

TUE 302
Le courant électrique
Continuité
Ohm
Interactions . . .
Forces de Laplace
Biot et Savart
Equation de Maxwell
Calcul
Ampère
Exercice
Définition légale
Dipole magnétique
Page d'accueil
Page de Titre
Page 17 de 40
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter



b) Déduire du résultat précédent le champ magnétique crée en M par un fil rectiligne infini parcouru par un courant I (M est à la distance r du fil dans ce cas).

Pour un fil de longueur infini, on fait tendre θ_1 vers $-\dfrac{\pi}{2}$ et θ_2 vers $\dfrac{\pi}{2}$.

$$B_\phi(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right) \text{ devient } \overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\overrightarrow{e_\phi}$$

On peut maintenant réintroduire le vecteur classique $\overrightarrow{e_\theta}$ des coordonnées cylindriques puisque la variable θ a disparu de l'expression de $\overrightarrow{B}(M)$ pour conclure

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\overrightarrow{e_\theta}.$$

c) Calculer la circulation de $\overrightarrow{B}$ sur un cercle de rayon r ayant pour axe le courant et montrer que le théorème d'Ampère est bien vérifié.

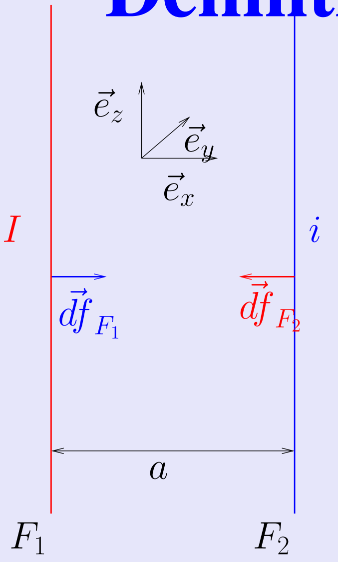
Appliquons le théorème d'Ampère sur un cercle de rayon x (cercle adapté pour la géométrie du champ $\overrightarrow{B}$, de plus B est constant sur ce cercle en raison de la symétrie de révolution du problème) :

$$\oint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{L}} B_\theta \overrightarrow{e}_\theta \cdot (x d\theta) \overrightarrow{e}_\theta = \mu_0 I$$
$$\Leftrightarrow B_\theta \, x \int_{\theta=0}^{2\pi} = 2\pi x B_\theta = \mu_0 I$$

On retrouve bien le même résultat qu'à la question b) soit

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \overrightarrow{e_\theta}.$$

Définition légale de l'Ampère



Soient 2 fils parallèles F_1 et F_2 infiniment longs, distants de a et parcourus respectivement par des courants électriques I et i. Le champ magnétique généré par la circulation de I a pour expression

$$\overrightarrow{B}_I(r) = \frac{\mu_0 I}{2\,\pi\,r}\overrightarrow{e}_\theta.$$

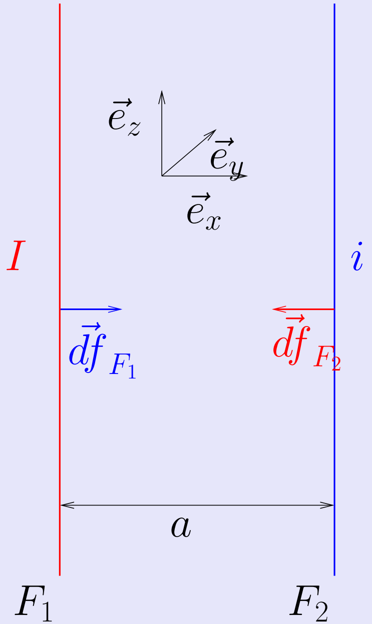
Au niveau de F_2, $\overrightarrow{B}_I$ se réécrit en coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{B}_I(a) = \dfrac{\mu_0 I}{2\,\pi\,a}\overrightarrow{e}_y$.

Le champ magnétique généré par la circulation de i a pour expression

$$\overrightarrow{B}_i(r) = \frac{\mu_0 i}{2\,\pi\,r}\overrightarrow{e}_\theta.$$

Au niveau de F_1, $\overrightarrow{B}_i$ se réécrit en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{B}_i(a) = -\frac{\mu_0 i}{2\,\pi\,a}\overrightarrow{e}_y.$$

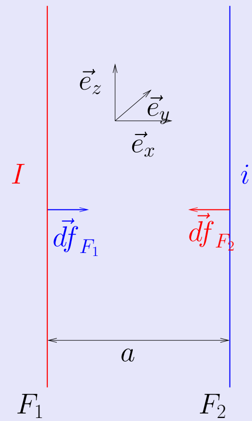


Calculons la force de Laplace s'exerçant sur le fil F_2 :

$$\overrightarrow{df}_{F_2} = i\,\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B} = i\,\overrightarrow{dz} \wedge \frac{\mu_0 I}{2\,\pi\,a}\overrightarrow{e}_y = -\frac{\mu_0\,I\,i}{2\,\pi\,a} dl\,\overrightarrow{e}_x$$

De même :

$$\overrightarrow{df}_{F_1} = I\,\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B} = I\,\overrightarrow{dz} \wedge \left(-\frac{\mu_0 i}{2\,\pi\,a}\overrightarrow{e}_y\right) = \frac{\mu_0\,I\,i}{2\,\pi\,a} dl\,\overrightarrow{e}_x$$



$$\overrightarrow{df}_{F_2} == -\frac{\mu_0\, I\, i}{2\,\pi\, a} dl\, \overrightarrow{e}_x$$

$$\overrightarrow{df}_{F_1} = \frac{\mu_0\, I\, i}{2\,\pi\, a} dl\, \overrightarrow{e}_x$$

$\longrightarrow$ Les fils sont attirés si I et i vont dans le même sens, repoussés si I et i circulent dans un sens opposé.

Calculons maintenant $\overrightarrow{f}_{F_1}$ et $\overrightarrow{f}_{F_2}$ par unité de longueur et pour le cas particulier où $I = i$:

$$\overrightarrow{f}_{F_2} = -\frac{\mu_0\, i^2}{2\,\pi\, a} \overrightarrow{e}_x, \quad \overrightarrow{f}_{F_1} = \frac{\mu_0\, i^2}{2\,\pi\, a} \overrightarrow{e}_x$$

L'intensité de la force subie par chaque fil par unité de longueur est alors

$$\frac{\mu_0\, i^2}{2\,\pi\, a}.$$

TUE 302
GRENOBLE 1
UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
SCIENCES. TECHNOLOGIE. SANTÉ
Le courant électrique
Continuité
Ohm
Interactions . . .
Forces de Laplace
Biot et Savart
Equation de Maxwell
Calcul
Ampère
Exercice
Définition légale
Dipole magnétique
Page d'accueil
Page de Titre
Page 22 de 40
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Définition légale de l'Ampère

L'intensité de la force subie par chaque fil par unité de longueur est alors

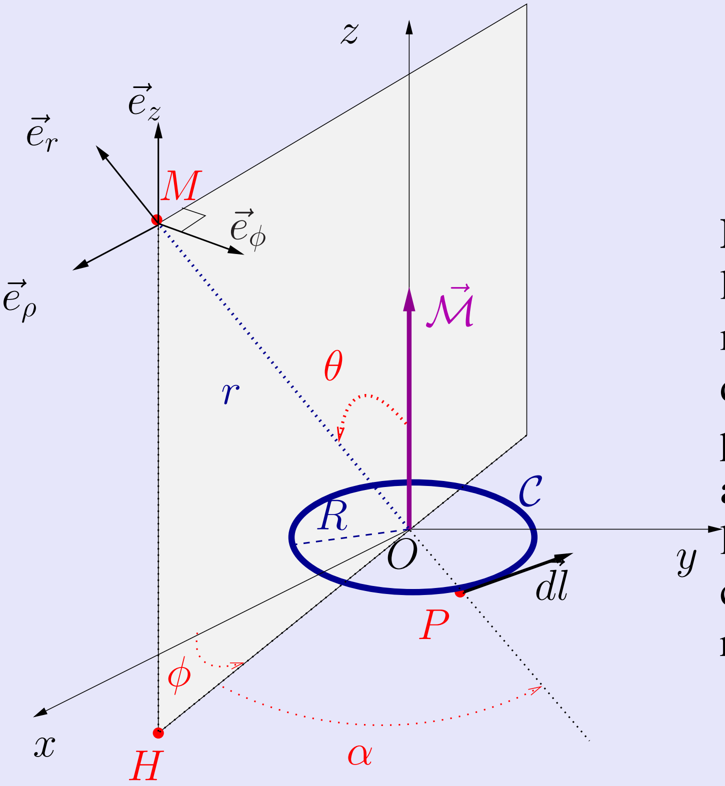
$$\frac{\mu_0\, i^2}{2\,\pi\, a}.$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ \text{S.I.} \ \longrightarrow f_1 = 2\,10^{-7}\,\frac{i^2}{a}$$

$$\text{Si } a = 1 \text{ et } i = 1 \longrightarrow f_1 = 2\,10^{-7}\ \text{N}$$

Décret de 1961 : Un ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et distants de 1 m dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à 2.10^{-7} N/m.

Dipole magnétique



Énoncé : Donner l'expression du champ magnétique induit par un dipole magnétique que l'on prendra sous la forme d'un anneau de courant. Donner l'équation des lignes de champ magnétique et représenter ces lignes.

Démonstration difficile.
Importante pour la géologie, géomagnétisme, paléomagnétisme ...

Page d'accueil
Page de Titre
Page 24 de 40
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Dipole magnétique & Potentiel vecteur

On a (équations de Maxwell) :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{J} \text{ et } \mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$$

Puisque div $\overrightarrow{B}$=0, il existe un vecteur $\overrightarrow{A}$ tel que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$.
(preuve: $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}) = 0 \;\; \forall \;\; \overrightarrow{V}$).
Par définition, $\overrightarrow{A}$ est le **potentiel vecteur magnétique**.
A noter que $\overrightarrow{A}$ n'est déterminé qu'à une fonction scalaire f près : en effet, on a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right) = \overrightarrow{0} \;\; \forall f$.
On a alors $\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$ qui respecte aussi $\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$. f s'appelle la jauge.
Il en résulte que $\overrightarrow{A}$ est indéterminé. En pratique on utilise cette indetermination pour imposer en plus $\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = 0$, c'est la jauge de Coulomb.

Potentiel vecteur

On a donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{J} \text{ et div}\,\overrightarrow{B} = 0$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} \text{ et div}\,\overrightarrow{A} = 0$$

On peut réécrire :

$$\mu_0\,\overrightarrow{J} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\;\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = -\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{A} + \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\overrightarrow{A})$$

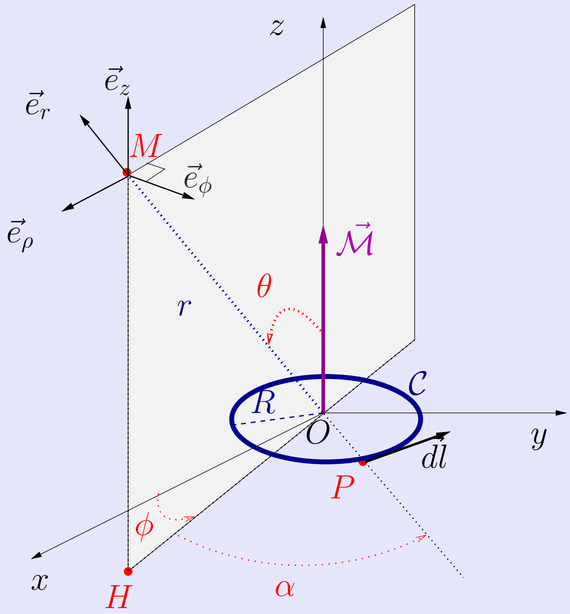
On obtient alors l'équation de Poisson qu'il faut résoudre pour obtenir $\overrightarrow{A}$

$$\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{A} = -\mu_0\,\overrightarrow{J}\,.$$

Un fois que $\overrightarrow{A}$ est déterminé, on prend le rotationnel pour calculer $\overrightarrow{B}$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}$$

Dipole : Intégration directe ?

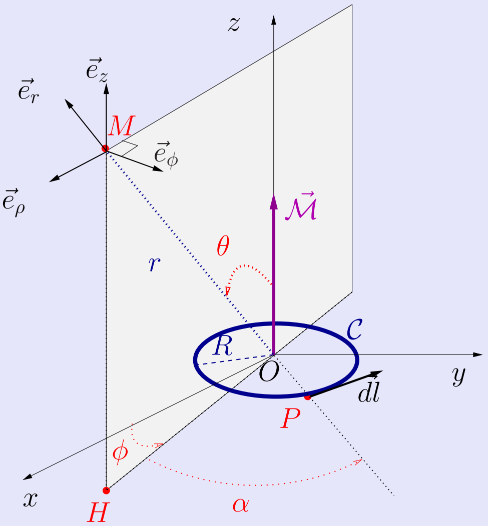


On aurait pu aussi intégrer directement Biot et Savart:

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{I\,\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{u}}{PM^2}$$

avec $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{PM} / \mid \overrightarrow{PM} \mid$ ..... mais c'est mathématiquement encore plus difficile que de passer par le potentiel vecteur.

Dipole magnétique



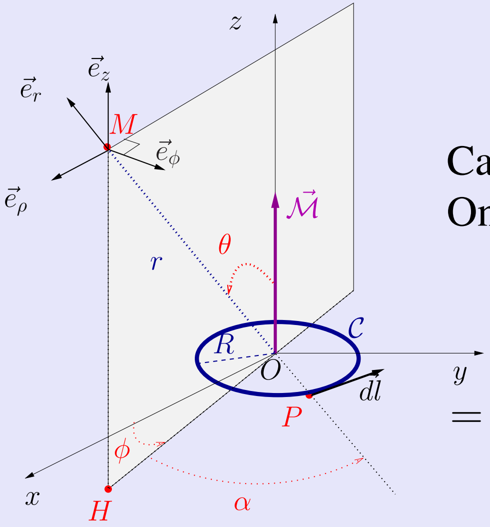
En calculant avec le potentiel vecteur, on a à intégrer (par définition)

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{I\,\overrightarrow{dl}}{PM}$$

(même notation que la loi de Biot et Savart).
Règle de symétrie : Si un point M appartient à un plan d'anti-symétrie de la distribution des courants électriques, alors le potentiel vecteur est perpendiculaire à ce plan au point M

$$\rightarrow \overrightarrow{A}(M) = A(M)\overrightarrow{e}_\phi.$$

Dipole magnétique



$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{I\,\overrightarrow{dl}}{PM}$$

Calculons PM :

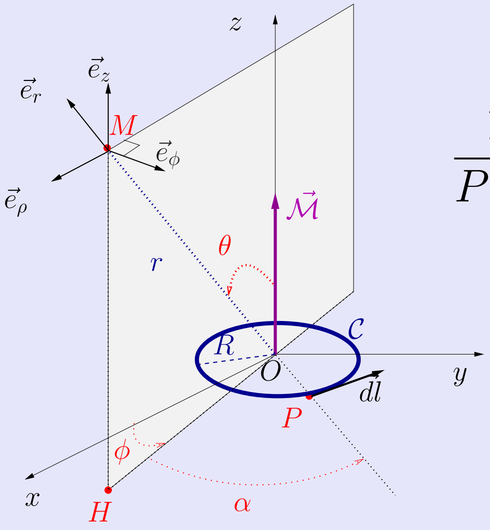
On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$,

$$\begin{aligned} PM &= \left|\,\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}\,\right| \\ &= \left[\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[r^2 + R^2 - 2\,\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Puisque $R \ll r$, on utilise un développement limité d'ordre 1 en faisant apparaître le rapport R/r :

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{R^2}{r^2} - \frac{2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{R^2}{r^2} - \frac{2\,\vec{r}\cdot\overrightarrow{OP}}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Dipole magnétique



$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{R^2}{r^2} - \frac{2\,\overrightarrow{e}_r \cdot \overrightarrow{OP}}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{2\,\overrightarrow{e}_r \cdot \overrightarrow{OP}}{r}\right)$$

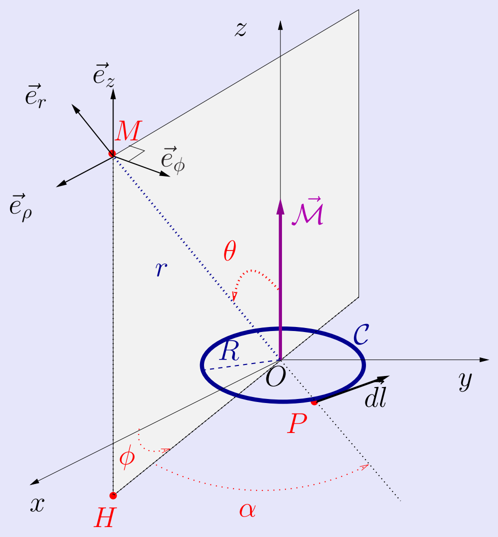
$$\frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{r} + \frac{\overrightarrow{e}_r \cdot \overrightarrow{OP}}{r^2}$$

On peut alors récrire $\overrightarrow{A}(M)$:

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{I\,\overrightarrow{dl}}{PM} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[\frac{1}{r}\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{dl} + \frac{1}{r^2}\oint_{\mathcal{C}} \left(\overrightarrow{e}_r \cdot \overrightarrow{OP}\right)\overrightarrow{dl}\right]$$

or $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{0}$

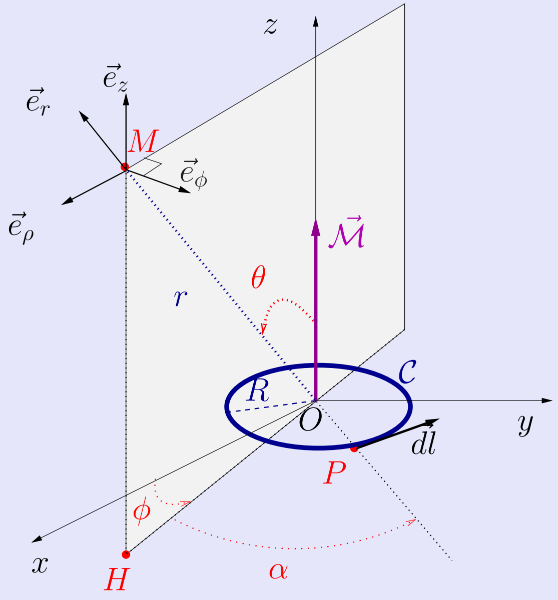
Dipole magnétique

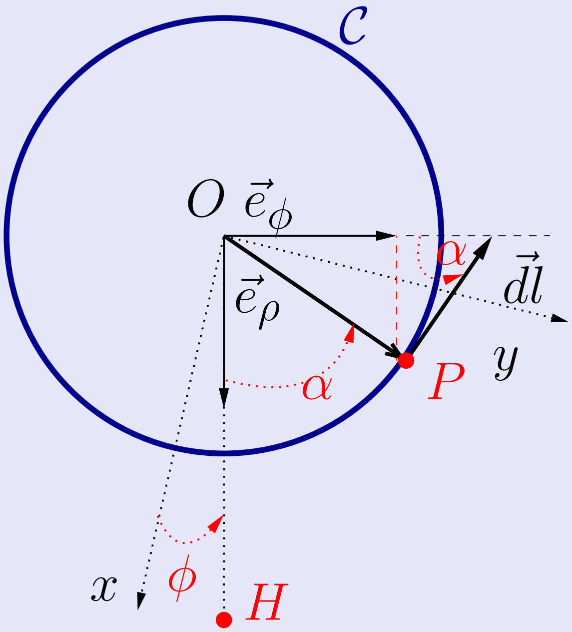


On réécrit $\overrightarrow{A}(M)$:

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[\frac{1}{r^2} \oint_{\mathcal{C}} \left(\overrightarrow{e}_r \cdot \overrightarrow{OP} \right) \overrightarrow{dl} \right]$$

Projetons $\overrightarrow{e}_r$, $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{dl}$ sur le système de coordonnées cylindriques $(\overrightarrow{e}_\rho, \overrightarrow{e}_\phi, \overrightarrow{e}_z)$.





$$\overrightarrow{e}_r = \sin\theta\,\overrightarrow{e}_\rho + \cos\theta\,\overrightarrow{e}_z = \frac{\rho}{r}\overrightarrow{e}_\rho + \frac{z}{r}\overrightarrow{e}_z.$$

Il est commode d'utiliser l'angle α pour exprimer $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{dl}$. /pause

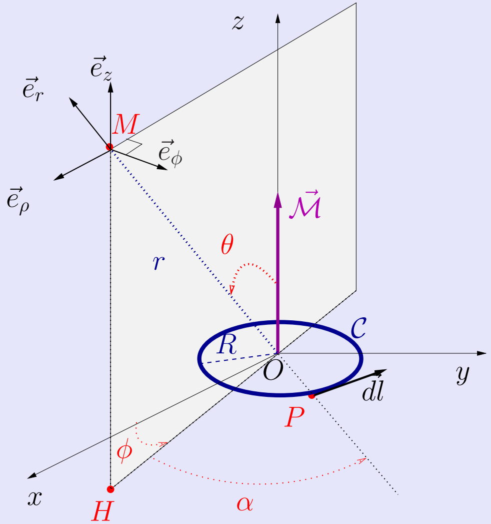
On a :

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\alpha\,\overrightarrow{e}_\rho + R\sin\alpha\,\overrightarrow{e}_\phi,$$

$$\overrightarrow{dl} = Rd\alpha\,\overrightarrow{e}_\alpha = -R\sin\alpha d\alpha\,\overrightarrow{e}_\rho + R\cos\alpha d\alpha\,\overrightarrow{e}_\phi$$

Page d'accueil
Page de Titre
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 32 de 40
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Dipole magnétique



$$\left(\vec{e}_r\cdot\overrightarrow{OP}\right)\vec{dl} = \left(\frac{\rho}{r}R\cos\alpha\right)$$

$$\left(-R\sin\alpha d\alpha\,\vec{e}_\rho + R\cos\alpha d\alpha\,\vec{e}_\phi\right)$$

On a vu $\vec{A}(M) = A(M)\,\vec{e}_\phi$

d'où $\left[\left(\vec{e}_r\cdot\overrightarrow{OP}\right)\vec{dl}\right]\cdot\vec{e}_\phi =$

$$\left(\frac{\rho}{r}R\cos\alpha\right)R\cos\alpha d\alpha$$

On en déduit $\vec{A}(M)$:

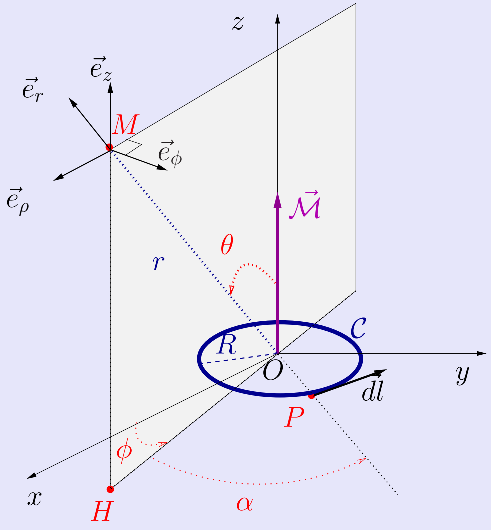
$$A_\phi(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{1}{r^2}\oint_{\mathcal{C}}\left[\left(\vec{e}_r\cdot\overrightarrow{OP}\right)\vec{dl}\right]\cdot\vec{e}_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,R^2\,\rho}{r^3}\oint_0^{2\pi}\cos^2\alpha d\alpha$$

$$A_\phi(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,R^2\,\pi\,\rho}{r^3}\text{ or }\rho = r\sin\theta$$

Dipole magnétique

On en conclut :

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\pi \ R^2 \sin\theta}{r^2} \overrightarrow{e}_\phi$$



En introduisant le moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ de la spire,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\,\mathcal{S}\overrightarrow{n} = I\pi R^2 \overrightarrow{e}_z$$

et en remarquant que

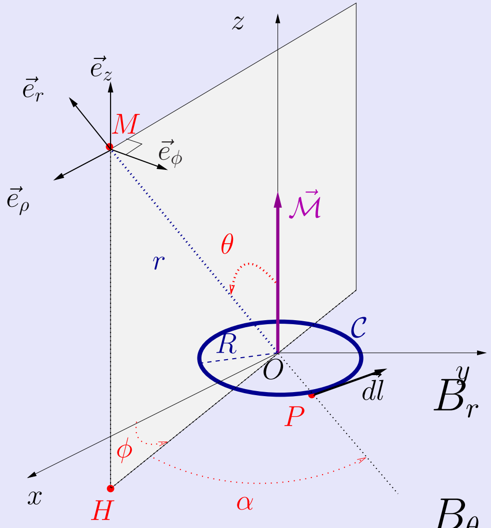
$$\overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{e}_r = \sin\theta \overrightarrow{e}_\phi$$

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{e}_r}{r^2}\right).$$

A grande distance de la spire, le potentiel vecteur décroît en $1/r^2$.

Et le champ magnétique $\overrightarrow{B}$?

Dipole magnétique



On a l'expression de $\overrightarrow{A}(M)\ \forall\ M$ tel que $R \ll r$, en fonction de la distance r, de la colatitude (coordonnées sphériques).

On peut calculer les composantes de $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$ en coordonnées sphériques :

$$
\begin{aligned}
B_r &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(A_\phi \sin\theta\right)}{\partial\theta}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathcal{M}\cos\theta}{r^3},\\
B_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\phi\right)}{\partial r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^3},\\
B_\phi &= 0.
\end{aligned}
$$

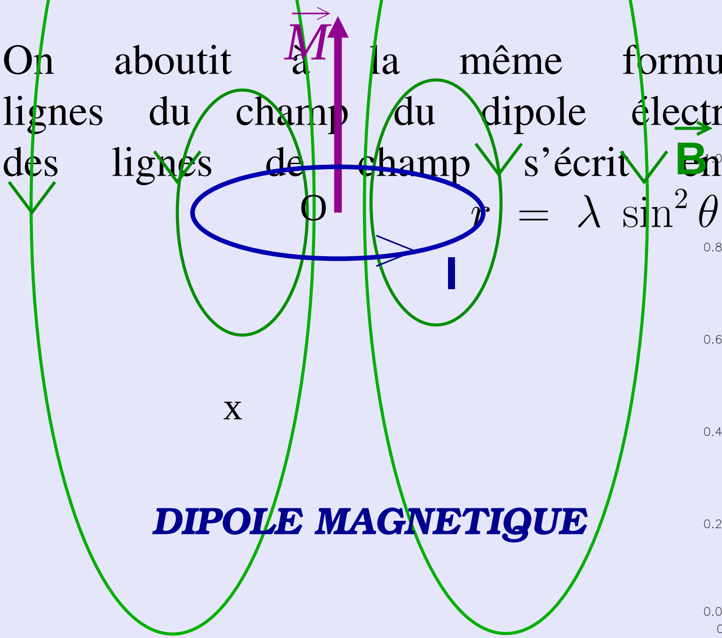
Lignes de champ du dipole

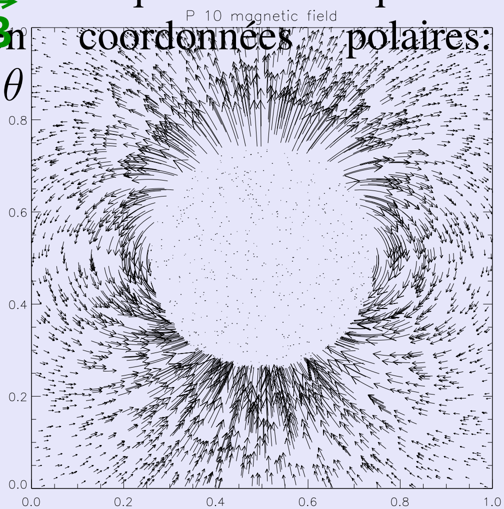
Par définition, les lignes de champ de $\overrightarrow{B}$ sont des courbes tangentes au vecteur champ $\overrightarrow{B}$ en chaque point tel que $d\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{B}$. On écrit alors qu'un petit déplacement en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{dM} = dr\overrightarrow{e}_r + rd\theta\overrightarrow{e}_\theta$ est colinéaire en tout point à $\overrightarrow{B} = B_r\overrightarrow{e}_r + B_\theta\overrightarrow{e}_\theta$:

$$dr\overrightarrow{e}_r + rd\theta\overrightarrow{e}_\theta = k(B_r\overrightarrow{e}_r + B_\theta\overrightarrow{e}_\theta) \text{ etc ...}$$

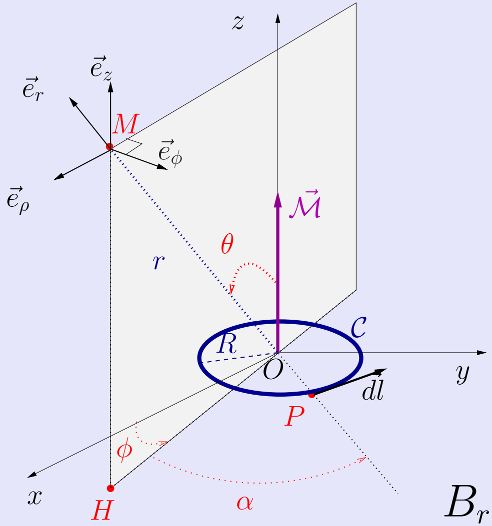
On aboutit à la même formulation que pour les lignes du champ du dipole électrostatique. L'équation des lignes de champ s'écrit en coordonnées polaires:

$$r = \lambda \sin^2\theta$$





Le dipole magnétique



Résumons :

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{I\pi\ R^2 \sin\theta}{r^2} \overrightarrow{e}_\phi$$

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{e}_r}{r^2}\right).$$

A grande distance de la spire, le potentiel vecteur décroît en $1/r^2$.

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(A_\phi \sin\theta\right)}{\partial\theta}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathcal{M}\cos\theta}{r^3}, \\ B_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\phi\right)}{\partial r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^3}, \\ B_\phi &= 0. \end{aligned}$$

Le dipole magnétique

Récrivons le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ avec une formulation vectorielle également : On a

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{e}_r}{r^2}\right).$$

et on cherche

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}(M).$$

Utilisons l'égalité vectorielle suivante (formulaire)

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(f\overrightarrow{C}\right) = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,f\right) \wedge \overrightarrow{C} \;+\; f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{C}.$$

Posons

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{r} \text{ et } f = \frac{1}{r^3}\left(\text{en utilisant } \overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{r}}{r^3}\right]\right)$$

Pour déterminer $\overrightarrow{B}$, on doit alors calculer :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{1}{r^3}\,\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{r}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right) \wedge \left(\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{r}\right) + \frac{1}{r^3}\;\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{r}\right)$$

Page d'accueil
Page de Titre
Page 38 de 40
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{1}{r^3}\overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{r}\right)=\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right)\wedge\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{r}\right)+\frac{1}{r^3}\ \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{r}\right)$$

✓ $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^4}\overrightarrow{e}_r$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right)\wedge\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{r}\right)=-\frac{3}{r^4}\overrightarrow{e}_r\wedge\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{r}\right)=\frac{3}{r^3}\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{e}_r\right)\wedge\overrightarrow{e}_r$$

✓ $\overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{r}=\mathcal{M}\,r\,\sin\theta\,\overrightarrow{e}_\phi$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{r}\right)=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(\mathcal{M}\,r\,\sin^2\theta\right)}{\partial\theta}\right]\overrightarrow{e}_r-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(\mathcal{M}\,r^2\,\sin\theta\right)}{\partial r}\right]\overrightarrow{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{r}\right)=2\mathcal{M}\left[\cos\theta\,\overrightarrow{e}_r-\sin\theta\,\overrightarrow{e}_\theta\right]=2\mathcal{M}\,\overrightarrow{e}_z=2\overrightarrow{\mathcal{M}}$$

$$\frac{1}{r^3}\ \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{r}\right)=\frac{2\overrightarrow{\mathcal{M}}}{r^3}$$

Le dipole magnétique

On en déduit

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{2\vec{\mathcal{M}}}{r^3} + \frac{3\left(\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{e}_r\right) \wedge \vec{e}_r}{r^3}\right].$$

En utilisant $\vec{e}_r \wedge \left(\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{e}_r\right) = \vec{\mathcal{M}} - \left(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_r\right)\vec{e}_r$, on en déduit la formulation vectorielle de $\vec{B}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\left(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_r\right)\vec{e}_r - \vec{\mathcal{M}}}{r^3}\right].$$

Formulation utilisée au semestre 6 dans l'U.E. `TUE307`.