Licence 3 – Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement

Université Joseph-Fourier

TUE 302 : Outil Physique et Géophysique

⑤ Champ de Température T et flux de chaleur $\overrightarrow{q}$

Daniel.Brito@ujf-grenoble.fr

LABORATOIRE DE GÉOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE,
MAISON DES GÉOSCIENCES,
BP53, 38041 GRENOBLE CEDEX 09,

☎ 04 76 82 80 42.

Page d'accueil
Page de Titre
Page 1 de 48
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Introduction

Après 3 champs vectoriels $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{g}$ & $\overrightarrow{B}$
un champ scalaire $T(\overrightarrow{X}, t)$, la champ de température dont les unités sont les degrés Kelvin K (ou degrés celsius ℃).

`Joule (1818 - 1889)` : Le transfert de chaleur est un transfert d'énergie. “ *Quand un transfert d'énergie a pour seul origine la thermique, on l'appelle FLUX DE CHALEUR* ”.

Exemple:
- Transfert d'énergie lorsqu'on chauffe une casserole d'eau.
- Apport d'énergie via une flamme transforme l'eau en vapeur, qui à son tour peut servir à faire fonctionner un appareil...

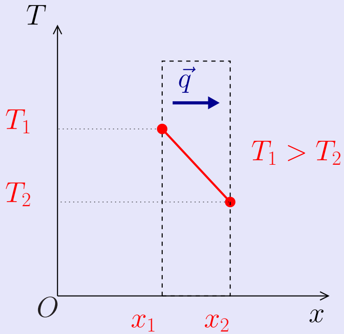
Loi de Fourier

Cette loi relie le *champ* scalaire de température au *champ vectoriel* flux de chaleur.

Par définition, **le flux de chaleur** en un point, une quantité de chaleur par unité de surface et de temps, est proportionnel au gradient de température

$$\overrightarrow{q} = -k\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T = -k\,\overrightarrow{\nabla}\,T$$

où $\overrightarrow{q}$ s'exprime en W / m^2 = (J / s) / m^2, k en W/ m / K, et T en K.



Remarques :

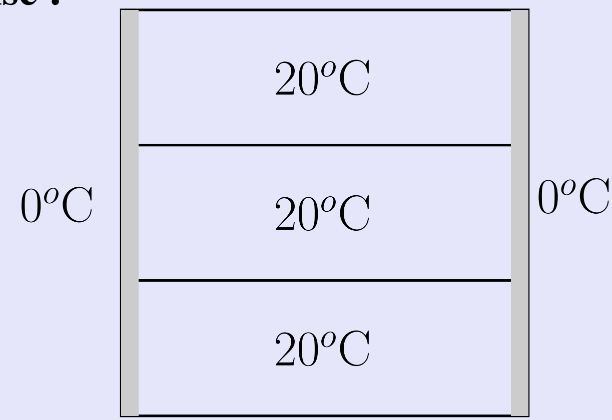
- ✓ Origine du signe $-$: le flux de chaleur est toujours dirigé du chaud vers le froid. ($\overrightarrow{\text{grad}}T$ pointe toujours dans le sens des variations croissantes de la fonction T).
- ✓ k : aptitude du milieu à transmettre la chaleur : **conductivité thermique du milieu**. Exemple : Alumininum 386 W / m / K, eau 0.58 W / m / K, oxygène 0.027 W / m / K, air 0.026 W / m / K.

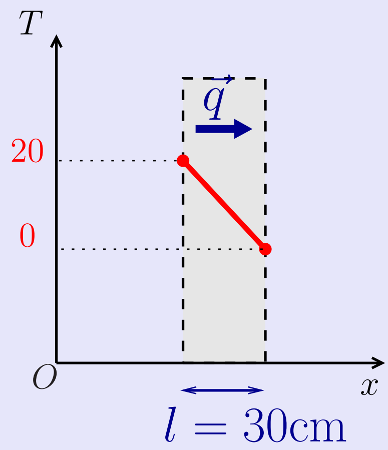
Page d'accueil
Page de Titre
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 3 de 48
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Calcul de flux de chaleur

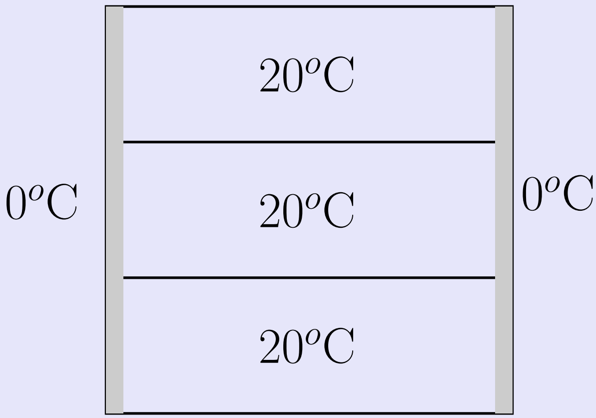
Énoncé :
J'habite au premier étage d'une maison de 10 m $\times$ 10 m comportant 4 étages. La température extérieure est de 0 °C, la température intérieure est de 20 °C à mon étage et également 20 °C à l'étage au dessus et en dessous.
Les murs de 30 cm d'épaisseur sont en calcaire dont la conductivité thermique est $k = 2$ W / m / K.
Quelle puissance débite mon chauffage électrique pour maintenir cette température intérieure constante ? Combien cela coûte-t-il, le kWh d'électricité étant facturé 0.07650 €?

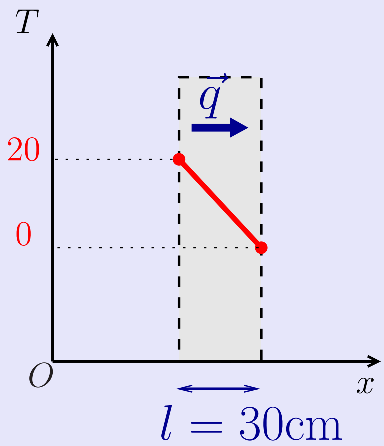
Réponse :





Flux de chaleur





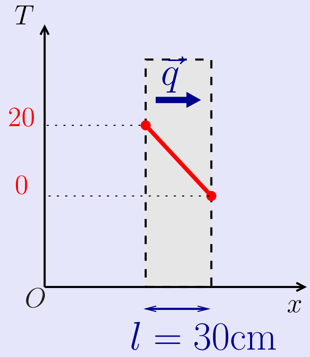
Seuls les murs latéraux contribuent au flux de chaleur ; la surface de ces murs est $S = 4 \times 2.5 \times 10 = 100 \ \text{m}^2$.
Le flux de chaleur à travers les murs est donc horizontal (selon $\vec{e}_x$) et est a priori constant si on suppose un système stationnaire en temps.

$$\vec{q} = -k \frac{dT}{dx} \vec{e}_x$$

$$\text{A.N. : } q = -2 \times \left(-\frac{20}{0.3} \right) \simeq 134 \, \text{W/m}^2$$

Page d'accueil
Page de Titre
Page 5 de 48
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Flux de chaleur



$$\text{A.N. : } q = -2\,\frac{-20}{0.3} \simeq 134\,\mathbf{W/m^2}$$

On en déduit la puissance totale que doit délivrer le chauffage pour maintenir la température de la pièce constante et donc alimenter ce flux continu de chaleur à travers les murs :

$$P = q \times S = 134 \times 100 = 13\,400\ \mathbf{W} = 13.4\ \mathbf{kW}$$

L'heure de chauffage coûte alors :

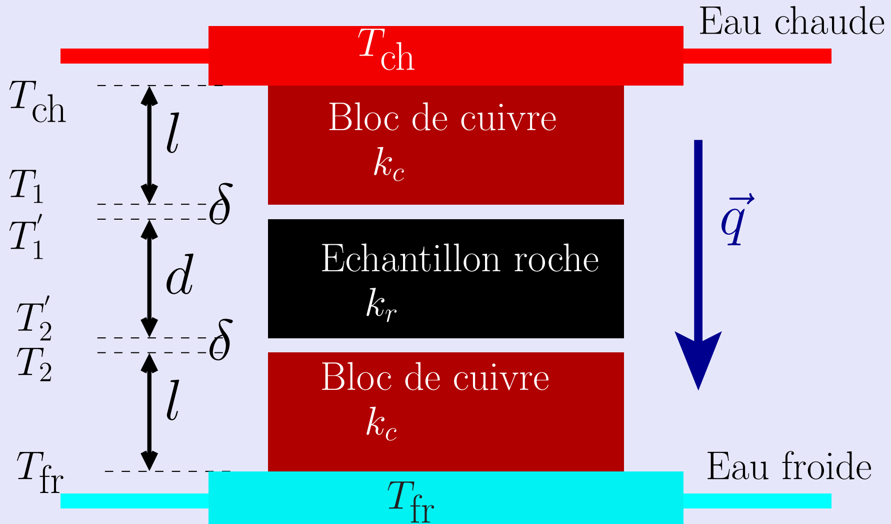
$$13.4 \times 0.07650 = 1.02\ €$$

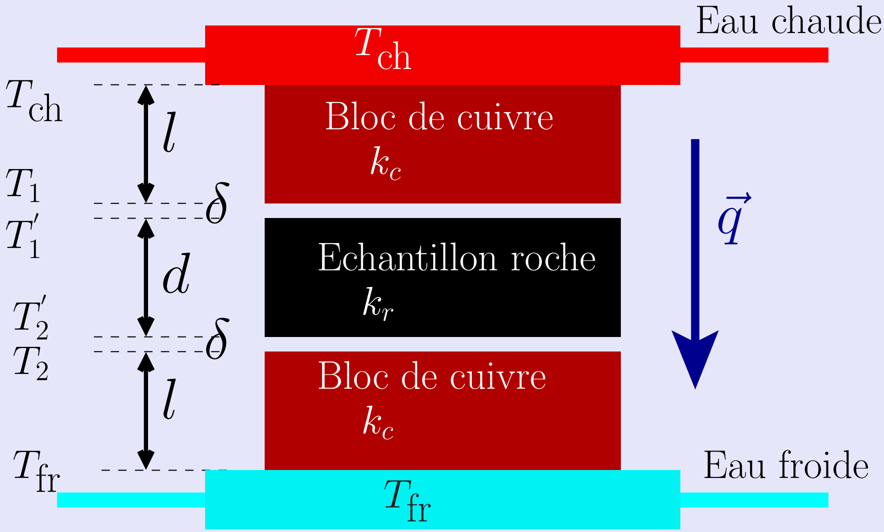
Mesure de k pour une roche

Le flux de chaleur varie à la surface terrestre. C'est une grandeur que l'on veut contraindre précisément en Géophysique. Pour déterminer $\overrightarrow{Q}_{\text{Terre}}$, on effectue des forages, puis on mesure T en fonction de la profondeur.

Afin de remonter à $\overrightarrow{Q}_{\text{Terre}} = -k_{\text{roches}}\overrightarrow{\text{grad}}T_{\text{Terre}}$, il faut déterminer la conductivité des roches prélevées lors du forage. On prélève des échantillons que l'on analyse en laboratoire.

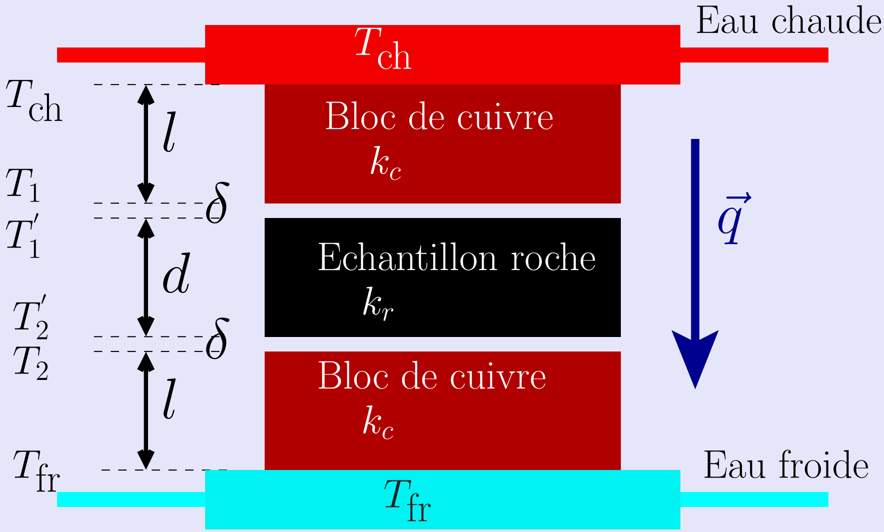
Voici un exemple de montage expérimental destiné à mesurer la conductivité des roches en laboratoire:





On mesure avec des *thermocouples* les températures $T_{\rm fr}$, T_2, T_2', T_1, $T_1' et T_{\rm ch}$ et on constate qu'après un temps transitoire, ces températures restent demeurent stationnaires.
Cela implique que le flux de chaleur qui traverse d'une part les blocs de cuivre et d'autre part l'échantillon est nécessairement constant ... autrement la température devrait croître quelque part!
Ce que l'on cherche dans ce calcul c'est k_r ; l, k_c et les températures sont parfaitement connues.
Écrivons alors que le flux de chaleur $\vec{q}$ à travers les différentes parties du montage est constant et déduisons-en k_r avec le système d'équation.

TUE 302
Introduction
Loi de Fourier
Exercice Flux
Mesure de k
Modes de transfert...
Équation de la chaleur
Commentaires sur...
Temps de diffusion
Mesure du...
Équation de la...
Adimensionnement
Page d'accueil
Page de Titre
Page 8 de 48
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter



$$q_{\rm c1} = -k_{\rm c}\frac{T_{\rm ch} - T_1}{l} \quad (1)$$

$$q_{\rm c2} = -k_{\rm c}\frac{T_2 - T_{\rm fr}}{l} \quad (2)$$

$$q_{\rm r} = -k_{\rm r}\frac{T_1' - T_2'}{d} \quad (3)$$

$$q_{\rm i1} = -k_{\rm i}\frac{T_1 - T_1'}{\delta} \quad (4)$$

$$q_{\rm i2} = -k_{\rm i}\frac{T_2' - T_2}{\delta} \quad (5)$$

$$q_{\rm c1} = q_{\rm c2} = q_{\rm r} = q_{\rm i1} = q_{\rm i2}$$

$$(1)+(2) \longrightarrow -\frac{k_c}{l}\left[T_{ch} - T_1 + T_2 - T_{fr}\right] = 2\,q$$

$$(1)=(2) \longrightarrow T_2 - T_{fr} = T_{ch} - T_1$$

On en déduit

$$T_{ch} - T_1 = -q\frac{l}{k_c} \qquad (6)$$

On a aussi (4) $\longrightarrow T_1^{'} = T_1 + \dfrac{\delta}{k_i q}$ et (5) $\longrightarrow T_2^{'} = T_2 - \dfrac{\delta}{k_i q}$.

En substituant dans (3), on obtient :

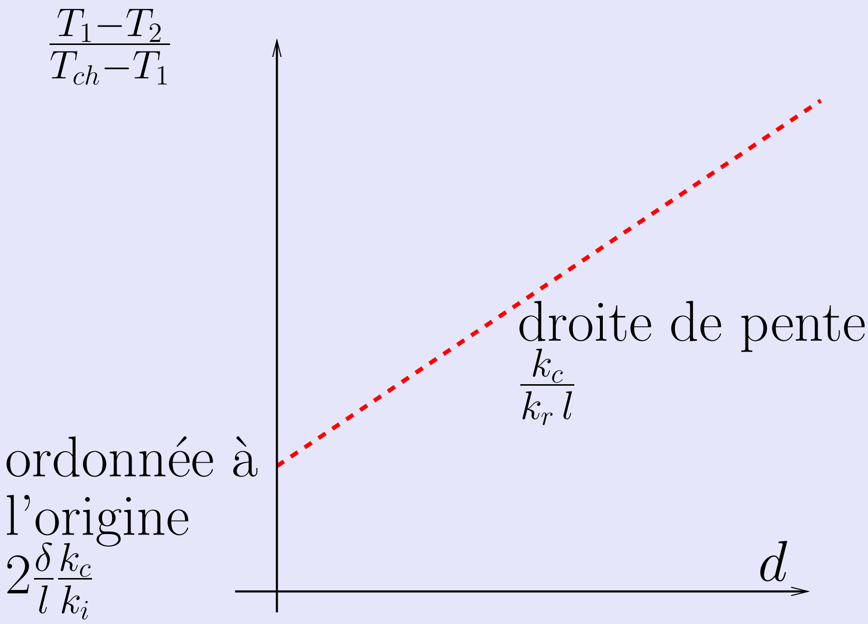
$$T_1 - T_2 = -q\frac{d}{k_r} - 2\frac{\delta q}{k_i}. \qquad (7)$$

(6) / (7) donne finalement :

$$\frac{T_1 - T_2}{T_{ch} - T_1} = \frac{k_c}{k_r}\frac{d}{l} + 2\frac{\delta}{l}\frac{k_c}{k_i}.$$

On obtient :

$$\frac{T_1 - T_2}{T_{\mathrm{ch}} - T_1} = \frac{k_{\mathrm{c}}}{k_{\mathrm{r}}}\frac{d}{l} + 2\frac{\delta}{l}\frac{k_{\mathrm{c}}}{k_{\mathrm{i}}}.$$



On peut ainsi en déduire expérimentalement k_r.

Modes de transfert de la chaleur

La **conduction** est ce qui régit le transfert de chaleur dans les parties superficielles de la Terre (croûte). C'est un transfert de chaleur qui se fait de proche en proches entre atomes voisin, sans mouvement d'ensemble.

Plus profond dans la Terre (manteau et noyau), c'est la **convection** qui évacue plus efficacement la chaleur vers la surface. C'est un transport de chaleur par **advection** de la chaleur par le mouvement du fluide.

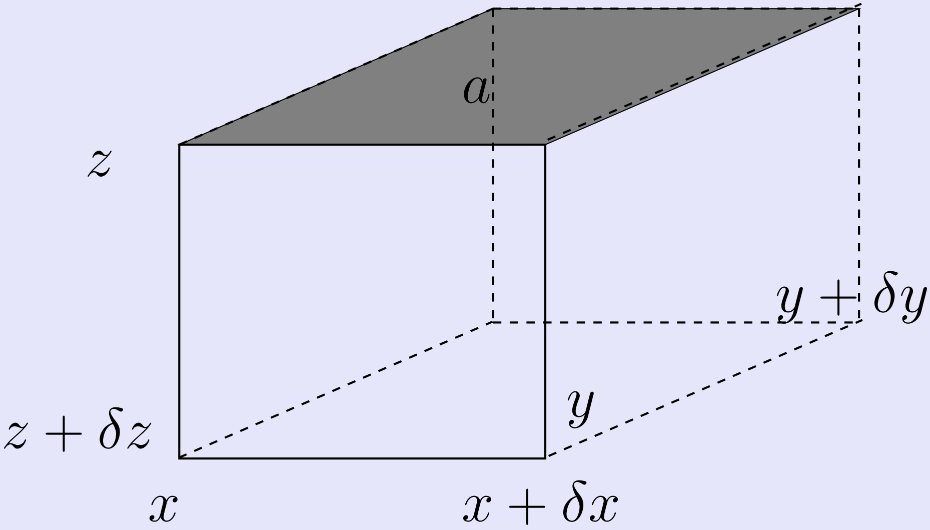
Le transfert par **rayonnement électromagnétique** (non abordé dans ce cours) concerne principalement l'atmosphère avec le rayonnement du soleil vers la Terre.

Nous allons démontrer l'équation de la chaleur qui gouverne la température d'une parcelle volumique, dans le cas où le mode de transfert de la chaleur est **la conduction thermique** (TD ❿)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho\, C_P} \Delta T + \frac{A}{\rho\, C_P}$$

Équation de la chaleur

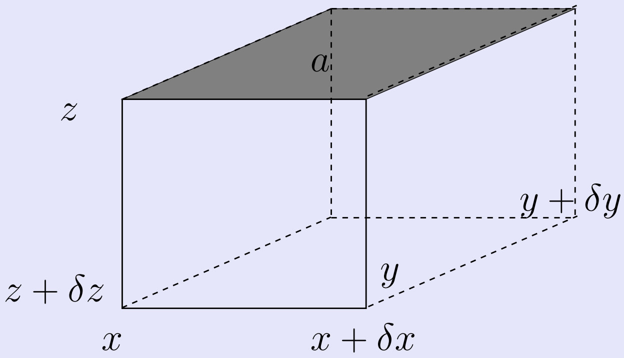
À partir de la loi de Fourier $\overrightarrow{q} = -k\overrightarrow{\nabla} T$, étudions l'évolution de la température d'un petit volume infinitésimal.



Supposons que ce cube infinitésimal de côté δx, δy et δz change de température δT en l'espace d'un temps δt.

Quels sont les différents facteurs responsables de la variation de température δT du cube et de quoi va dépendre cette variation ?

Quels sont les différents facteurs responsables de la variation de température δT du cube et de quoi va dépendre cette variation ?



- ✓ ① Le bilan de flux de chaleur à travers le cube (la chaleur rentrante soustraite de la chaleur sortante).
- ✓ ② La chaleur produite dans le cube.
- ✓ ③ Les variations de température sont liées à la chaleur spécifique de l'élément C_P.

① Bilan de flux de chaleur

Calculons le bilan de flux à travers la direction z.
On utilise un développement de Taylor (développement limité) :

$$q(z+\delta z) = q(z) + \delta z \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{(\delta z)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \ldots$$

On en déduit le gain net de chaleur par unité de temps dans le cube :

$$a\, q(z) - a q(z+\delta z) = -a \delta z \frac{\partial q}{\partial z}.$$ Unités : $\mathrm{m}^2 \times \mathrm{m} \times (\mathrm{W} / \mathrm{m}^2) \times (1/\mathrm{m})$.

② Chaleur interne

Les différentes **sources** de production de chaleur interne :
- désintégration d'éléments radioactifs.
- chaleur latente de changement de phase.
- chaleur produite par cisaillement visqueux.
- réaction chimique (exothermique ou endothermique).
-...

② Chaleur interne

On se donne un taux de production de chaleur interne par unité de volume et par unité de temps A, A s'exprime en W/m^3.
Pour avoir la production totale de chaleur interne par unité de temps dans le cube, on multiplie le taux A par le volume du petit cube, soit :

$$A\, a\, \delta z.$$

① & ② Gain de chaleur

En combinant les résultats de ① & ②, on obtient le gain (ou la perte) de chaleur net du cube par unité de temps :

$$-a\delta z \frac{\partial q}{\partial z} + A\, a\, \delta z.$$

③ Capacité à se réchauffer

Tous les matériaux ne vont pas se réchauffer de la même manière en fonction de la quantité de chaleur qu'ils reçoivent. Il faut introduire la notion de capacité calorifique C_P : par définition, **la capacité calorifique à pression constante C_P est la quantité d'énergie requise pour augmenter de 1 degré 1 kg de matériel considéré.**

On en déduit que les unités de C_P sont des Joules / unité de masse / degré C, soit des J / kg / °C.

Des exemples : $C_{P\,\mathrm{eau}} = 4186$ J / kg / °C $\quad C_{P\,\mathrm{cuivre}} = 390$ J / kg / °C, $C_{P\,\text{air à 100 °C}} = 1000$ J / kg / °C, $C_{P\,\mathrm{roches}} = 1000$ J / kg / °C.

Concernant le cube infinitésimal, de densité ρ (kg/m^3), sa température augmenter de δT degrés en δ secondes. Le volume du cube est $a\,\delta z$ et sa masse $a\,\delta z\,\rho$ (m^3 kg/m^3).

Quelle est l'énergie transmise au cube et à quelle vitesse pour que sa température augmente de δT °C en δt secondes ?

③ Capacité à se réchauffer

Quelle est l'énergie transmise au cube et à quelle vitesse pour que sa température augmente de δT en δ secondes :

$$C_P \times \ (a\,\delta z\,\rho) \ \times \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{Unités : J / (kg °C)} \times \ \text{kg} \ \times \text{°C / s} = \quad \text{W}$$

①+②+③ :

La quantité de chaleur emmagasinée ou perdue par le cube est convertie en une augmentation de température :

$$C_P \times \ (a\,\delta z\,\rho) \ \frac{\partial T}{\partial t} = -a\delta z \frac{\partial q}{\partial z} + A\ a\ \delta z.$$

$$\Leftrightarrow \rho\, C_P \frac{\partial T}{\partial t} = A - \frac{\partial q}{\partial z}$$

On remplace q par $-k\ \partial T/\partial z$.

$$\Leftrightarrow \rho\, C_P \frac{\partial T}{\partial t} = A + k \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z^2}$$

Équation de la chaleur

Équation de la chaleur selon la direction z du cube :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho \, C_P} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{A}{\rho \, C_P}$$

On peut généraliser le bilan du flux de chaleur sur les trois faces du cubes et obtenir :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho \, C_P} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{A}{\rho \, C_P}$$

EQUATION DE LA CHALEUR

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho \, C_P} \Delta T + \frac{A}{\rho \, C_P}$$

Équation de la chaleur

On a établi l'équation de la chaleur qui régit la température d'un volume infinitésimal soumis à aucun mouvement et dont la taux de production de chaleur interne par unité de volume et par unité de temps est A :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho\, C_P} \Delta T + \frac{A}{\rho\, C_P}$$

On introduit la diffusivité thermique ,

$$\kappa = \frac{k}{\rho C_P} \ \text{unités}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}.$$

A retenir : la diffusivité d'une grandeur physique traduit la diffusion d'une grandeur par unité de temps, $\longrightarrow$ m^2/s. La viscosité cinématique d'une fluide (ν en mécanique des fluides), la diffusivité magnétique (λ en magnétohydrodynamique, cf noyau terrestre) sont exprimées également en m^2/s.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + \frac{A}{\rho\, C_P}$$

Commentaires sur l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + \frac{A}{\rho\, C_P}$$

Avec cette équation, on va déterminer la distribution de température $T(M,t)$ à l'intérieur d'un volume donné lorsqu'on se donne des **conditions limites** : température ou flux de chaleur sur les frontières du domaine étudié.

Attention, cette équation est valable dans le cas où le transfert de chaleur ne s'opère que par **conduction thermique**.

Dans le cas de la convection thermique, il faut rajouter un **terme d'advection de la chaleur** par le mouvement du fluide (voir suite du cours).

Équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + \frac{A}{\rho\, C_P}$$

✓ $\frac{\partial T}{\partial t}$ est la variation temporelle explicite du champ de température en un point donné. Dans la plupart des exercices (TD ➓), on considère que l'on traite un problème stationnaire $\rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0$: si l'on considère un problème stationnaire en présence d'un flux de chaleur, cela revient à considérer qu'on a une source de chaleur quelque part qui maintient les température constantes. Dans le cas de l'exercice sur le flux de chaleur à travers les murs de calcaire, le chauffage électrique maintient la température de la pièce constante.Conséquence de la stationnarité d'un problème pour l'équation de chaleur en coordonnées cartésiennes à 1-D (avec A=0):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + \frac{A}{\rho\, C_P} \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0 = \frac{d^2 T}{dx^2} \Leftrightarrow \frac{dT}{dx} = \text{constante}$$

$\Leftrightarrow T(x) = \text{constante } x + \text{constante'}$, profil linéaire pour la température.

Équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + \frac{A}{\rho\, C_P}$$

✓ $\dfrac{A}{\rho\, C_P}$ est le terme de production de chaleur. Terme important lorsqu'on étudie le transfert de chaleur dans le manteau terrestre et la croûte. Au delà d'une certaine valeur de A, la conduction ne suffit plus à extraire l'excès de chaleur, et la convection thermique prend le pas ; c'est la cas dans le manteau terrestre. Le terme de production de chaleur A devient alors le terme moteur de la convection. On parle de convection avec chauffage interne (à opposé à convection avec chauffage par le bas qui est la cas classique de la convection de Rayleigh–Bénard).

Équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + \frac{A}{\rho\, C_P}$$

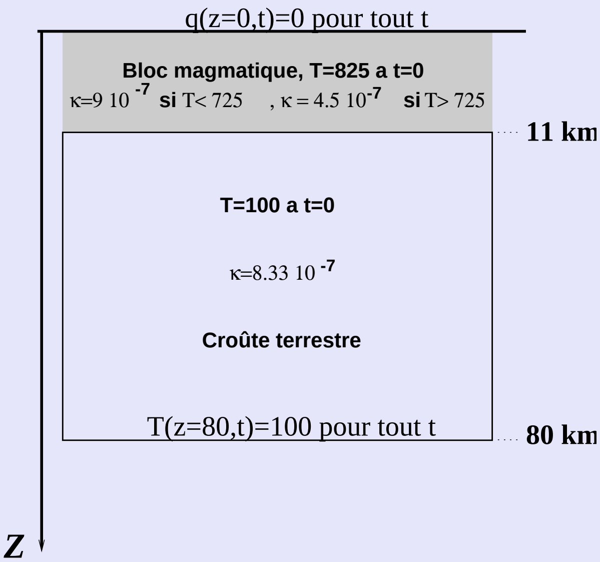
✓ $\kappa \Delta T$ est le terme de diffusion thermique. Dès que la température est inhomogène spatialement, l'opérateur Laplacien diffuse la température afin de gommer les hétérogénéités de température.

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

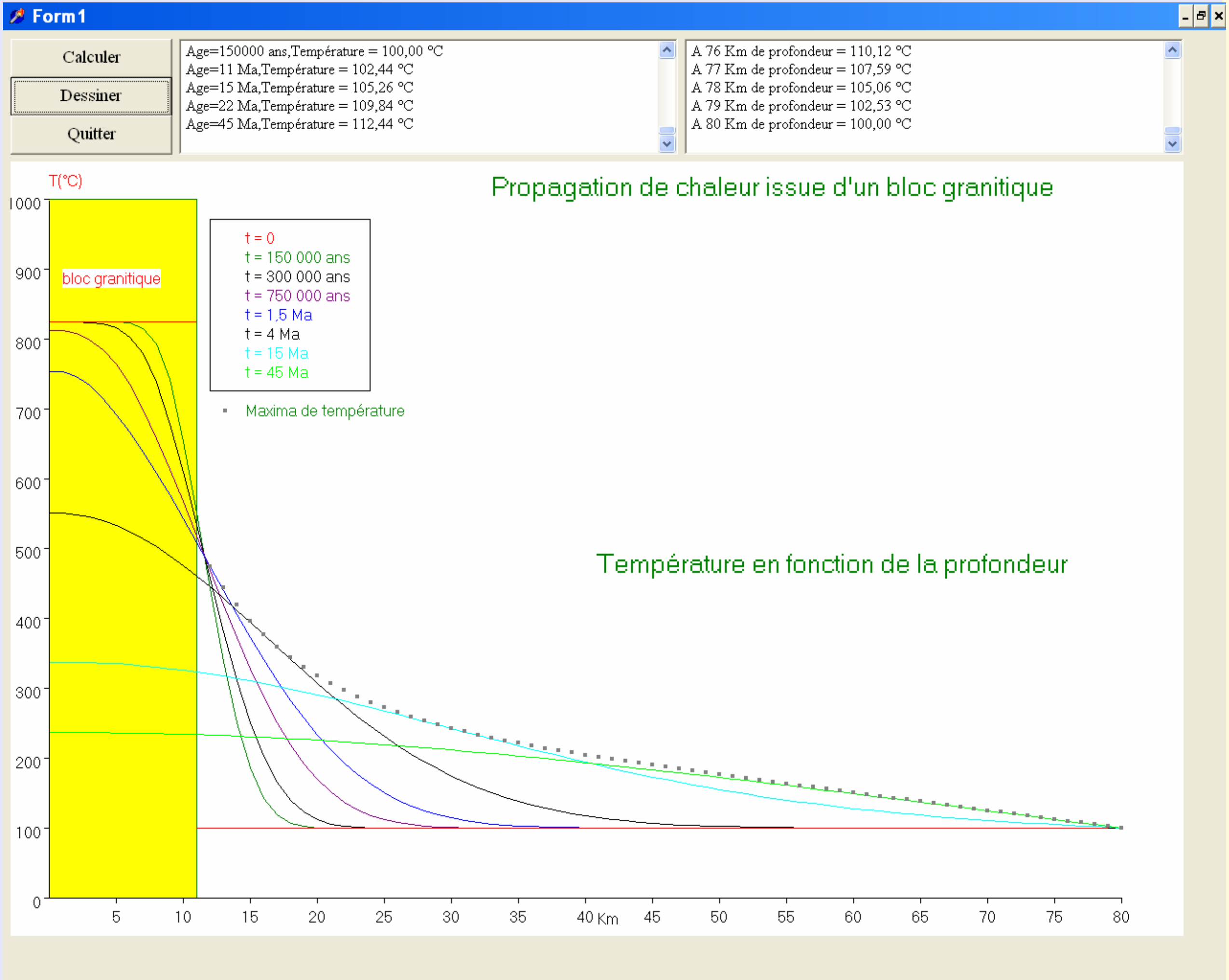
Lorsqu'on a à résoudre un problème dépendant du temps (refroidissement d'une planète au cours du temps par exemple), le problème est généralement difficile à traiter théoriquement.

Exemple de problème non stationnaire en temps : `TP ⑤ TUE 301`



Equation à résoudre numériquement

$$\frac{\partial T}{\partial t}(M,t) = \kappa \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial z^2}$$


Form1
Calculer
Dessiner
Quitter
Age=150000 ans,Température = 100,00 °C
Age=11 Ma,Température = 102,44 °C
Age=15 Ma,Température = 105,26 °C
Age=22 Ma,Température = 109,84 °C
Age=45 Ma,Température = 112,44 °C
A 76 Km de profondeur = 110,12 °C
A 77 Km de profondeur = 107,59 °C
A 78 Km de profondeur = 105,06 °C
A 79 Km de profondeur = 102,53 °C
A 80 Km de profondeur = 100,00 °C
Propagation de chaleur issue d'un bloc granitique
T(°C)
bloc granitique
t = 0
t = 150 000 ans
t = 300 000 ans
t = 750 000 ans
t = 1,5 Ma
t = 4 Ma
t = 15 Ma
t = 45 Ma
Maxima de température
Température en fonction de la profondeur
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
5
10
15
20
25
30
35
40 Km
45
50
55
60
65
70
75
80

Temps de diffusion

Difficile de résoudre un problème non stationnaire en temps par contre aisé d'avoir un ordre de grandeur concernant le temps que va prendre le champ de température pour diffuser une anomalie de température. Par souci de simplification, considérons le cas sans chauffage interne

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{\partial T}{\partial t}}{\Delta T} = \kappa$$

La diffusivité thermique κ (unités m^2/s) contrôle la vitesse de diffusion de la température.

Calcul d'ordre de grandeur

Soient

- ✓ δT une anomalie de température,
- ✓ L_0 une échelle de longueur dans le système que l'on étudie,
- ✓ t_0 un temps caractéristique.

On étudie un système dont le transfert de chaleur s'effectue par conduction thermique

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T.$$

On a alors

$$\frac{\partial T}{\partial t} \propto \frac{\delta T}{t_0}, \quad \Delta T \propto \frac{\delta T}{L_0^2}$$

$$\rightarrow \frac{\delta T}{t_0} \Big/ \frac{\delta T}{L_0^2} = \kappa \Leftrightarrow \frac{L_0^2}{t_0} = \kappa$$

$$L_0 = \sqrt{\kappa t_0} \qquad\qquad t_0 = \frac{L_0^2}{\kappa}$$

Un changement de température quelconque parcourra une distance ou diffusera à une distance $\sqrt{\kappa t_0}$ en t_0 secondes.

OU

Un changement de température quelconque prendra un temps $t_0 = L_0^2/\kappa$ pour se propager à une distance L_0.

Mesure du géotherme en surface

Exemple de résolution de l'équation de la chaleur pour un problème non stationnaire en temps.
1) **Approche pas des arguments d'ordre de grandeur**.
2) **Calcul explicite théorique du champ de température** $T(y, t)$.

Énoncé : La température à la surface terrestre n'est pas constante mais varie périodiquement (variations journalière, annuelle ..) ; pour cette raison il est important de vérifier que les mesures surfaciques du géotherme sont effectuées à des profondeurs suffisamment grandes pour s'affranchir de ces perturbations périodiques. C'est ce que l'on se propose d'étudier dans cet exercice.
Pour simplifier on ne considère qu'une dimension spatiale, la profondeur y comptée positivement vers le bas. Le but du problème est donc de déterminer l'impact de la perturbation périodique de température en surface sur la température en profondeur $T(y)$.

À partir d'une analyse purement dimensionnelle (ordre de grandeur), à quelle profondeur une anomalie de température journalière se propage-t-elle dans le sol ?

La diffusivité thermique du sol vaut κ=10^{-6} m^2/s.

On utilise directement utilise $L = \sqrt{\kappa\tau}$: on calcule à quelle distance une anomalie de température diffusera pendant une journée.

$L = \sqrt{\kappa\tau} = \sqrt{10^{-6} \times 1 \text{ jour}} = \sqrt{10^{-6} \times 86400} = 0.08$ m. On obtient donc 8 cm : c'est un ordre de grandeur.

Vérifions à quel point cet ordre de grandeur est juste en calculant explicitement le champ de température dans le sol en résolvant l'équation de la chaleur en fonction du temps.

On considère un demi-espace infini dans la région $y \geq 0$ dont la surface se situe en $y = 0$.
On suppose que la température surfacique évolue de la manière suivante

$$T(y=0,t) = T_S(t) = T_0 + \Delta T \cos \omega t. \tag{1}$$

On rappelle que la fréquence angulaire ω est reliée à la fréquence f par la relation $\omega = 2\pi f$ et à la période τ par $\tau = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$.
Si l'on considère des variations journalières,

τ = 1 jour = 86400 s.

$\omega = 2\pi/86400 = 7.272 \times 10^{-5}$ rad s^{-1}

$f = 1.157 \times 10^{-5}\ s^{-1}$

L'équation (1) constitue la condition limite de surface et la seconde condition limite s'écrit

$$T \longrightarrow T_0 \text{ lorsque } y \longrightarrow \infty$$

étant donné que l'impact de la perturbation surfacique à une profondeur importante devient négligeable. Cela revient à considérer une croûte isotherme à la température T_0 où les seules variations de température éventuelles au cours du temps sont induites par les variations de la température en surface.

L'équation de température adaptée à notre problème est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{k}{\rho C_P} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{2}$$

C'est l'équation de diffusion dépendante du temps (on ne considère ni convection ni production de chaleur interne A).
κ diffusivité thermique en m^2/s, ρ densité volumique en kg/m^3, k conductivité thermique en W/(m K) et C_P la capacité calorifique en J/(kg K).

On adopte la technique de séparation de variable pour résoudre l'équation précédente. On pose

$$T(y,t) = T_0 + Y_1(y)\cos\omega t + Y_2(y)\sin\omega t$$

Cela revient à dire que si l'on a une variation sinusoïdale périodique en surface alors l'impact en profondeur sera aussi sinusoïdale, de même fréquence mais avec un déphasage possible.

On substitue alors l'expression de T dans l'équation de la température (2).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$-\omega \sin\omega t Y_1 + \omega\cos\omega t Y_2 = \kappa \frac{d^2 Y_1}{dy^2}\cos\omega t + \kappa\frac{d^2 Y_2}{dy^2}\sin\omega t$$

$$-\omega Y_1 = \kappa\frac{d^2 Y_2}{dy^2} \text{ et } \omega Y_2 = \kappa \frac{d^2 Y_1}{dy^2} \Leftrightarrow Y_1 = -\frac{\kappa}{\omega}\frac{d^2 Y_2}{dy^2} \text{ et } Y_2 = \frac{\kappa}{\omega}\frac{d^2 Y_1}{dy^2}.$$

On cherche une éq. dif. en Y_1 et une autre en Y_2. Par susbstitution

$$\frac{d^4 Y_2}{dy^4} + \frac{\omega^2}{\kappa^2} Y_2 = 0 \text{ et } \frac{d^4 Y_1}{dy^4} + \frac{\omega^2}{\kappa^2} Y_1 = 0. \tag{3}$$

On cherche alors une solution de

$$\frac{d^4Y_2}{dy^4} + \frac{\omega^2}{\kappa^2}Y_2 = 0 \ \text{ et } \ \frac{d^4Y_1}{dy^4} + \frac{\omega^2}{\kappa^2}Y_1 = 0 \ \text{ sous la forme}$$

$$Y_2(y) = ce^{\alpha y} \ \text{ (idem pour } Y_1) \ \text{ où } \alpha \text{ et } c \text{ sont des complexes.}$$

On s'occupe d'abord de Y_2 :

$$\frac{d^4Y_2}{dy^4} + \frac{\omega^2}{\kappa^2}Y_2 = 0 \ \text{ et } \ Y_2 = ce^{\alpha y} \Leftrightarrow \alpha^4 + \frac{\omega^2}{\kappa^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = i\frac{\omega}{\kappa} \text{ ou } \alpha^2 = -i\frac{\omega}{\kappa} \left(\text{On rappelle que} \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{d'où } \ \alpha = \pm\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \text{ et } \alpha = \pm\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} Y_2(y) = \quad & a_1 \exp\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}y\right) + a_2 \exp\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}y\right) \\ & + a_3 \exp\left(-\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}y\right) + a_4 \exp\left(-\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}y\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y_2(y) = \quad & a_1 \exp\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}y\right) + a_2 \exp\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}y\right) \\
& + a_3 \exp\left(-\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}y\right) + a_4 \exp\left(-\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}y\right)
\end{aligned}
$$

Puisque les fluctuations de température doivent décroître en fonction de la profondeur, $a_1 = a_2 = 0$.On obtient :

$$
Y_2(y) = \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\left(a_3 \exp\left(-iy\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right) + a_4 \exp\left(iy\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\right).
$$

En ne retenant que la partie réelle de Y_2 (on développe chaque constante sous la forme $z = x + iy$,et $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$ selon la formule de Moivre), l'expression finale de Y_2 est :

$$
Y_2(y) = \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\left[c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right)\right]
$$

On suit la même résolution pour Y_1 (équation de départ similaire). Finalement

$$\begin{cases} Y_2(y) = \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\left[c_1\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right)\right] \\ Y_1(y) = \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\left[c_3\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right) + c_4\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right)\right] \end{cases}$$

$$\longrightarrow T(y,t) = T_0 + \left(\exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\left[c_3\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right) + c_4\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right)\right]\right)\cos\omega t$$
$$+ \left(\exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\left[c_1\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right)\right]\right)\sin\omega t$$

On admet ici que $c_2 = c_3$ et $c_1 = -c_4$ (on le démontre avec les équations (3)).

$$T(y,t) = T_0 + \left(\exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\left[c_2\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right) - c_1\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right)\right]\right)\cos\omega t$$
$$+\left(\exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\left[c_1\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right)\right]\right)\sin\omega t.$$

La condition limite en surface

$$T_S = T(y=0,t) = T_0 + \Delta T\cos\omega t.$$

implique $c_1 = 0$ et $c_2 = \Delta T$.
On obtient

$$T(y,t) = T_0 + \left(\exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\left[\Delta T\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right)\right]\right)\cos\omega t$$
$$+\left(\exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\left[\Delta T\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right)\right]\right)\sin\omega t.$$

Page d'accueil
Page de Titre
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 38 de 48
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

$$T(y,t) = T_0 + \left(\exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\left[\Delta T \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right)\right]\right)\cos\omega t$$

$$+\left(\exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\left[\Delta T \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}y\right)\right]\right)\sin\omega t.$$

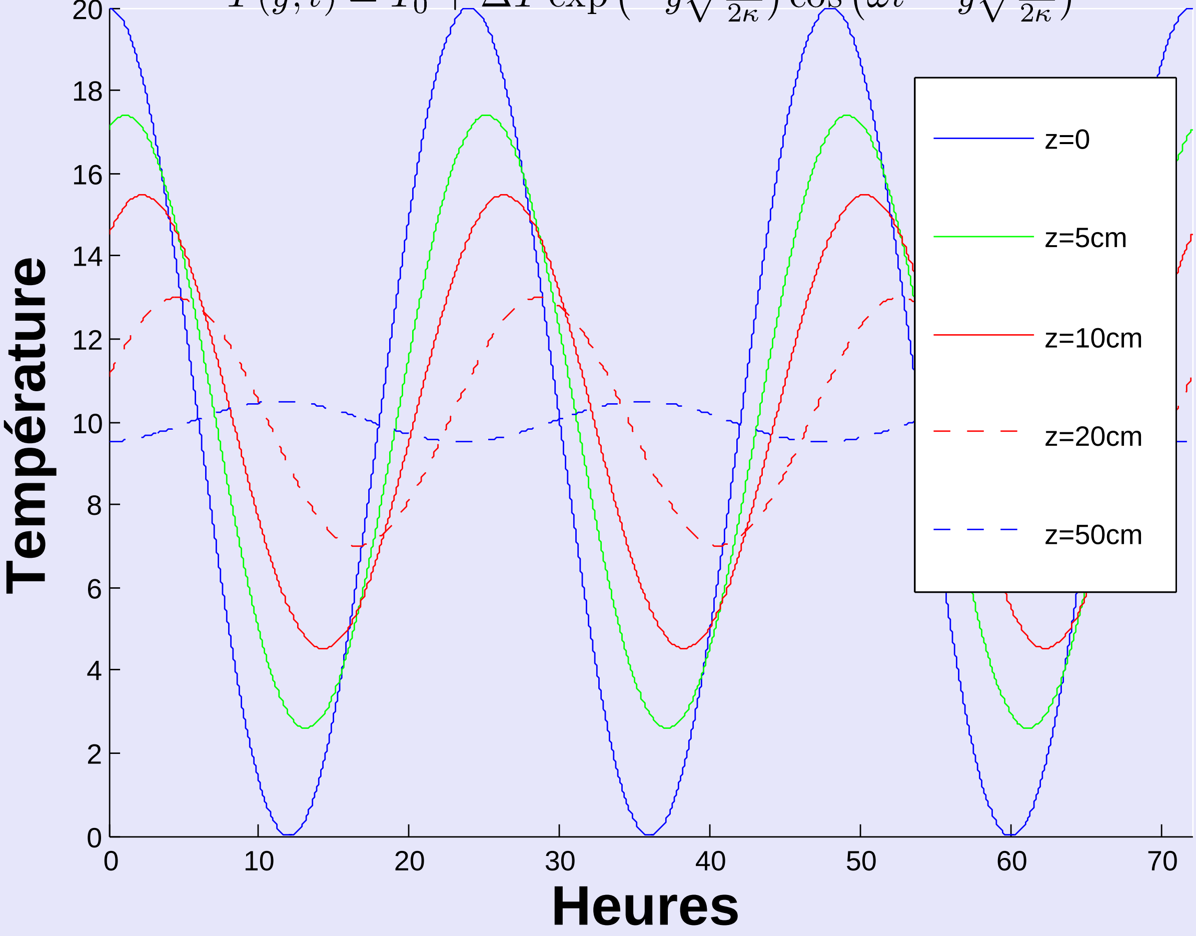
(On rappelle que $\cos a\cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$**)**

$$T = \quad T_0 + \Delta T \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\left(\cos\omega t\cos y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} + \sin\omega t \sin y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)$$

$$T(y,t) = T_0 + \Delta T \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)$$

Page d'accueil
Page de Titre
Page 39 de 48
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

$$T(y,t) = T_0 + \Delta T \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)$$



On définit *l'épaisseur de peau* d comme la profondeur à laquelle l'amplitude surfacique est diminuée d'un facteur $1/e$. Nous allons déterminer l'expression de d pour notre problème en fonction de κ et ω. Si l'on considère une perturbation journalière et $\kappa = 10^{-6}$ m^2/s, quelle est l'épaisseur de peau? A quelle profondeur doit-on alors mesurer le géotherme pour s'affranchir des perturbations surfaciques de température?

$$T(y,t) = T_0 + \Delta T \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)$$

Nous cherchons y_0 telle que

$$\frac{\exp\left(-y_0\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right)\Delta T}{\Delta T} = \exp\left(-y_0\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow y_0 = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}$$

Application numérique :

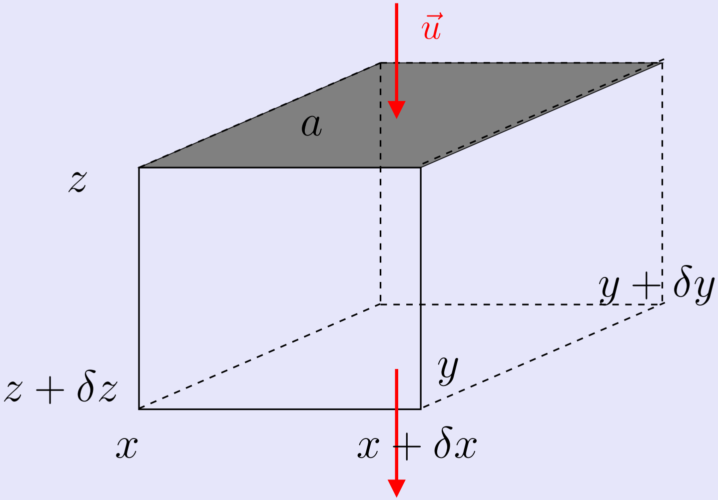
$\omega = 7.272 \times 10^{-5}$ rad s^{-1} $\rightarrow d = 0.17$ m.

On doit descendre au delà de cette profondeur de peau pour mesurer le géotherme.

Le calcul du départ basé sur les arguments dimensionnels donnaient le bon ordre de grandeur.

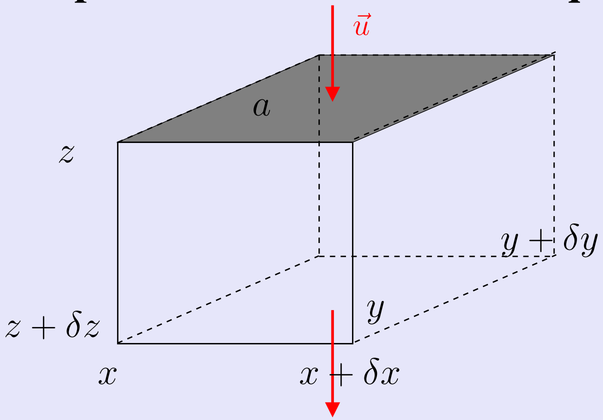
Équation de la chaleur en présence de convection

Supposons que ce cube infinitésimal de côté δx, δy et δz change de température δT en l'espace d'un temps δt. Il est cette fois au sein d'un écoulement fluide de vecteur vitesse $\overrightarrow{u} = u\overrightarrow{e}_z$.



Quels sont les différents facteurs responsables de la variation de température δT du cube et de quoi va dépendre cette variation ?

Quels sont les différents facteurs responsables de la variation de température δT du cube et de quoi va dépendre cette variation ?



✓ ② La chaleur produite dans le cube.

$$\mathbf{A}\ \mathbf{a}\ \delta\mathbf{z}\ \text{(en W)}\ .$$

✓ ③ Les variations de température sont liées à la chaleur spécifique de l'élément C_P.

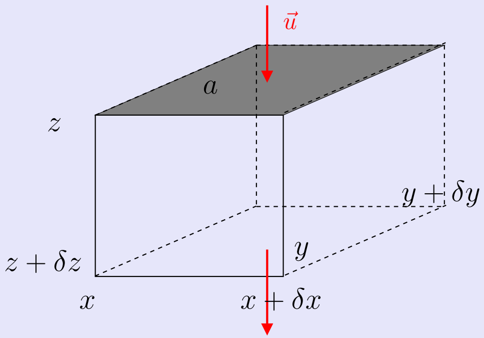
✓ ① Le bilan de flux de chaleur conductif à travers le cube (la chaleur rentrante soustraite de la chaleur sortante). Gain net de chaleur par unité de temps dans le cube :

$$-\mathbf{a}\delta\mathbf{z}\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{z}}\ \text{(en W)}.$$

$$\mathbf{C_P}\times\ (\mathbf{a}\,\delta\mathbf{z}\,\rho)\ \times\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\mathbf{t}}\ \text{(en W)}\ .$$

✓ ④ L'énergie thermique transmise au cube par le fluide en mouvement (bilan = contribution rentrante moins contribution sortante).

TUE 302
UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER
Introduction
Loi de Fourier
Exercice Flux
Mesure de k
Modes de transfert . . .
Équation de la chaleur
Commentaires sur . . .
Temps de diffusion
Mesure du . . .
Équation de la . . .
Adimensionnement
Page d'accueil
Page de Titre
Page 43 de 48
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter



✓ ④ L'énergie thermique transmise au cube par le fluide en mouvement (bilan = contribution rentrante moins contribution sortante).

L'énergie d'origine “thermique” du cube est $\rho C_P T$ en J/m^3, qui est une énergie par unité de volume.

La quantité d'énergie $\rho C_P T\, u\, a$ (en W) est transportée par le fluide au sein du cube via la face supérieure.
Sur la face opposée, on utilise un développement de Taylor :

$$\rho C_P\, u\, T(z+\delta z) = \rho C_P\, u\, T(z) + \delta z \frac{\partial}{\partial z}(\rho C_P\, u\, T) + \ldots$$

On en déduit le gain net en faisant le bilan sur les deux faces

$$\left[\rho C_P\, u\, T(z) - \rho C_P\, u\, T(z) - \delta z \frac{\partial}{\partial z}(\rho C_P\, u\, T)\right] a = -\delta \mathbf{z}\ \mathbf{a}\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}(\rho \mathbf{C_P}\, \mathbf{u}\, \mathbf{T})$$

Page d'accueil
Page de Titre
Page 44 de 48
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

①+②+③+④

La conservation de l'énergie nous dit que la quantité d'énergie transmise dans le cube par conduction, convection ou chauffage interne doit être égale à la variation d'énergie dans le cube.

$$C_P \times \;(a\,\delta z\,\rho)\;\frac{\partial T}{\partial t} = -\delta z\;a\;\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho C_P\,u\,T\right) - a\delta z\frac{\partial q}{\partial z} + A\;a\;\delta z.$$

$$\rho \text{ et } C_P \text{ constant } \;\Leftrightarrow \rho\;C_P\frac{\partial T}{\partial t} = -\rho C_P\frac{\partial\left(u\,T\right)}{\partial z} + A + k\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial\left(u\,T\right)}{\partial z} = \frac{A}{\rho C_P} + \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}T + u\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{A}{\rho C_P} + \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z^2}$$

$$\text{fluide incompressible } \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{A}{\rho C_P} + \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z^2}$$

Équation de la chaleur avec convection

Équation de la chaleur selon la direction z du cube :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{A}{\rho\, C_P} + \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

où u est la composante selon z du champ de vitesse du fluide.

On peut généraliser le bilan du flux de chaleur sur les trois faces du cubes et obtenir :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} T = \frac{A}{\rho\, C_P} + \kappa \Delta T$$

$\dfrac{\partial T}{\partial t}$: variation explicite du champ de température au cours du temps.

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} T$: terme d'advection du champ de température par le champ de vitesse.

$\dfrac{A}{\rho\, C_P}$: terme de production de chaleur interne, terme source de mouvement pour la convection.

$\kappa \Delta T$: terme de diffusion de la température, destiné à gommer toute hétérogénéité thermique, s'oppose à la convection.

Adimensionnement d'une équation

Les nombres sans dimension sont sans cesse utiliser en Physique pour caractériser un système (nombre de Rayleigh, nombre de Reynolds, ...). Ces nombres caractérisent un rapport entre plusieurs forces et le résultat est un nombre sans dimension qui est utilisé pour comparer différentes situations physiques : par exemple, on sait que si $1000 \lesssim Ra$ le système physique considéré est en convection thermique.

Exemple de nombre sans dimension comparant l'advection de la température par l'écoulement par rapport à la diffusion.

Considérons un récipient cubique de taille L_0, dans lequel un fluide de diffusivité thermique κ est en convection thermique avec des vitesses de l'ordre de U_0 m/s. Nous voulons savoir si la diffusion thermique joue un rôle important. Reprenons l'équation de la chaleur sans production de chaleur interne :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} T = \kappa \Delta T.$$

Adimensionnement

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} T = \kappa \Delta T.$$

Réécrivons cette équation avec des variables sans dimension d'ordre unité.

On pose

$$\begin{aligned} T &= T_0\, T^* \\ t &= t_0\, t^* = \frac{L_0}{U_0} t^* \\ u &= U_0\, u^* \\ \nabla T &= \frac{T_0}{L_0} \nabla^* T^* \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} T = \kappa \Delta T$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{T_0\, U_0}{L_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{U_0\, T_0}{L_0} \overrightarrow{u^*} \cdot \overrightarrow{\nabla^*} T^* = \kappa \frac{T_0}{L_0^2} \Delta^* T^*$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \overrightarrow{u^*} \cdot \overrightarrow{\nabla^*} T^* = \frac{\kappa}{L_0\, U_0} \Delta^* T^* = \frac{1}{Pe} \Delta^* T^*$$

On en déduit que le nombre de Peclet $Pe = \dfrac{U_0\, L_0}{\kappa}$ caractérise les effets d'advection sur les effets de diffusion de la température. Il est bien sans dimension. Si $Pe \ll 1$, le terme de diffusion domine et le transfert de chaleur dans le cube est largement dominé par la diffusion même si le fluide est en convection thermique. Si $Pe \gg 1$, à l'inverse, le terme de d'advection de la température domine.