Licence 3 – Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement

Université Joseph-Fourier

TUE 302 : Outil Physique et Géophysique

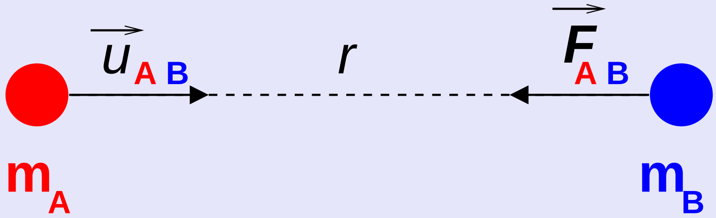
③ Le champ de gravité $\overrightarrow{g}$

Daniel.Brito@ujf-grenoble.fr
Maison des Géosciences
Université Joseph–Fourier
04 76 82 80 42

Loi universelle de gravitation

Forces de gravité: forces exclusivement attractives

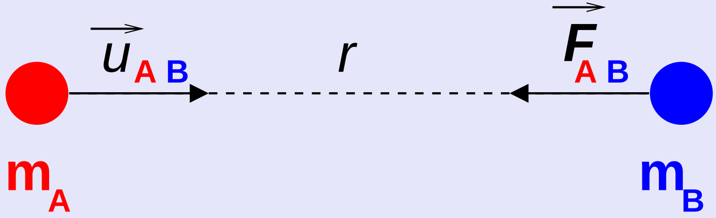
$$\overrightarrow{F}_{A\to B} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_B}{r^2}\overrightarrow{u}_{A\to B}$$



$$\boxed{m_A\, m_B > 0}$$

Constante de gravitation universelle (Cavendish, 1798)

$$\mathcal{G} \;=\; 6.67\ 10^{-11} \text{ S.I. } (\mathrm{Nm^2/kg^{\,2}})$$



$$\boxed{m_A\, m_B > 0}$$

$$\overrightarrow{F}_{A\rightarrow B} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_B}{r^2}\overrightarrow{u}_{A\rightarrow B}$$

Champ gravitationnel

$$\overrightarrow{g}_A = -\mathcal{G}\frac{m_A}{r^2}\overrightarrow{u}_{A\longrightarrow B}$$

$$\overrightarrow{F}_{B} = m_B\,\overrightarrow{g}_A$$

$$[\mathrm{N}] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{m}[\mathrm{g}] \quad \rightarrow [\mathrm{g}] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Principe de superposition:

$$\overrightarrow{F}_{\rightarrow B} = \sum_{i=1}^{N} -\mathcal{G}\frac{m_i m_B}{r^2}\overrightarrow{u}_{i\rightarrow B}$$

$$\overrightarrow{g}_{\rightarrow B} = \sum_{i=1}^{N} -\mathcal{G}\frac{m_i}{r^2}\overrightarrow{u}_{i\rightarrow B}$$

ou sous forme intégrale

$$\overrightarrow{g}_{\rightarrow B} = \iiint_{\mathcal{V}} -\mathcal{G}\frac{dm}{r^2}\overrightarrow{u}_{\rightarrow B}$$

Potentiel gravitationnel:

Pour les même raisons qu'en **électrostatique**, $\overrightarrow{g}$ dérive d'un potentiel scalaire; par définition,

$$\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} U$$

soit

$$U = -\mathcal{G}\frac{m}{r} + K$$

Remarque : lorsqu'on considère le champ gravitationnel terrestre, le potentiel décroît vers l'intérieur de la Terre .

Théorème de Gauss:

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{dS} = -4\pi\, \mathcal{G} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau = -4\pi\, \mathcal{G}\, M_{\mathrm{int}}$$

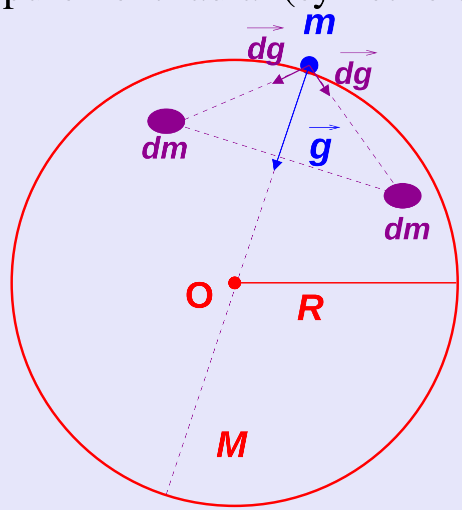
$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{g} = -4\pi\, \mathcal{G}\, \rho$$

Poids d'un corps

Définition:**Le poids d'un corps est la force gravitationnelle résultante de l'attraction gravitationnelle des autres corps présents dans l'Univers.**

Exemple: A la surface de la terre, la force d'attraction est si grande devant les forces des autres corps (présents dans l'Univers) que l'attraction gravitationnelle peut être considérée comme provenant uniquement de la Terre.

Supposons maintenant que la Terre soit une sphère parfaitement homogène. Supposons un corps de masse m à la surface terrestre. Le champ de gravité est purement radial (symétrie du problème).

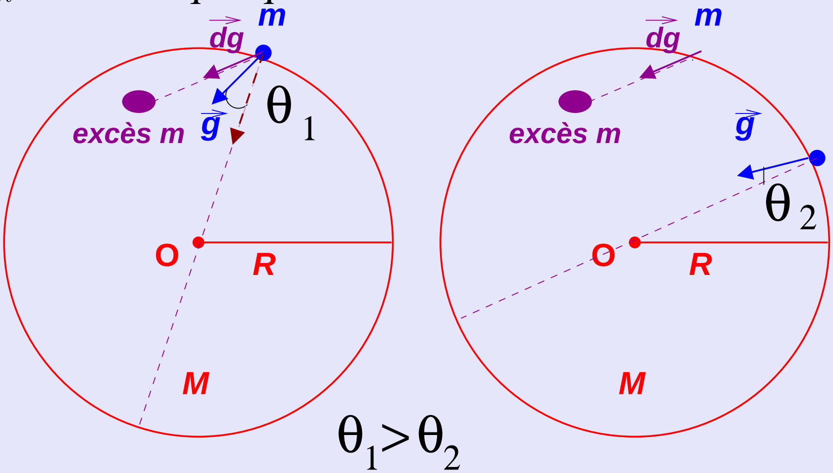


Poids d'un corps

Le POIDS du corps m s'écrit d'après la définition:

$$\text{Poids}_{\text{m}} = |\overrightarrow{F_m}| = mg = m\,\mathcal{G}\,\frac{M}{R^2}$$

OR, la terre n'est pas homogène (en répartition de masse)
DONC F_m varie de quelque dixièmes de % à la surface de la Terre.



Conclusions

· LA MASSE D'UN CORPS EST CONSTANTE en tout point de l'espace.

· LE POIDS D'UN CORPS VARIE d'un point à un autre de l'espace.

Exercice: Supposons que la valeur moyenne du module du champ de gravité $\mid \overrightarrow{g} \mid = 9.8$ m/s^2 et que le rayon de la terre soit de 6370 km. Quelle est la valeur moyenne de la densité volumique de masse de la Terre?

Réponse:

$$\mid \overrightarrow{g} \mid = \mathcal{G}\frac{M}{R^2} \simeq 9.8$$

$$\mathcal{G} = 6.67\ 10^{-11}\ \text{SI et}\ R = 6370\ 10^3\ \text{m}$$

$$M \simeq 5.96\ 10^{24}\ \ \text{kg}$$

d'où

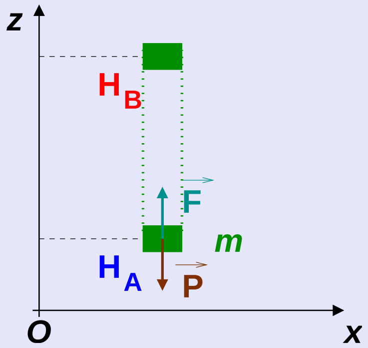
$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{M}{4/3\pi R^3}$$

$$\bar{\rho} = 5500\ \text{kg/m}^3$$

En sachant que la densité moyenne des granites en surface est de 3000 kg/m^3, qu'en déduisez vous sur la répartition des masses à l'intérieur de la Terre?

$\longrightarrow$ On en conclut que la masse doit être concentrée au centre de la Terre; on sait que la Terre est constituée de 3 couches principales concentriques: la *croûte*, le *manteau* et au centre en effet *un noyau dense* composé principalement de fer à l'état solide et liquide.

Travail



Supposons **un corps de masse** m que l'on veut soulever d'une hauteur H_A à une hauteur H_B. On effectue un travail pour soulever cette masse m.

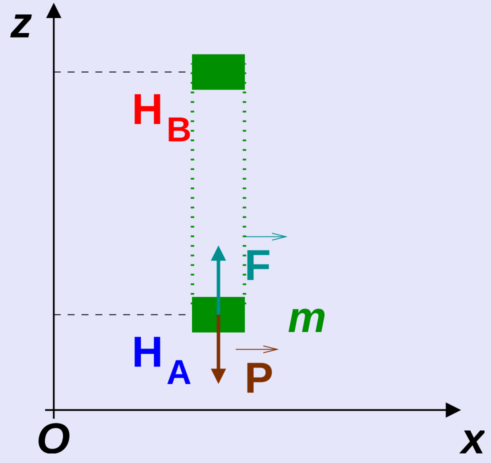
Par définition, le TRAVAIL D'UNE FORCE s'écrit:

$$W = \int_{H_A}^{H_B} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} == \int_{H_A}^{H_B} F \ \cos\theta \ dl$$

· Si $\overrightarrow{F}$ est dans **la même direction** que le déplacement, le travail est **positif** et de l'énergie est fournie au système subissant la force.

· Si $\overrightarrow{F}$ est dans **la direction opposée** au déplacement, le travail est **négatif** et de l'énergie est perdue par le système subissant la force.

TUE 302



Dans notre exemple:
La main fournit un travail ***positif*** et le corps de masse m stocke de l'énergie.
La masse m fournit un travail ***négatif*** et de l'énergie est perdue par la main.

Si on relâche soudainement le corps de masse m, le corps veut minimiser son énergie et relâche alors l'énergie stockée en chutant jusqu'au sol.

Le corps a relâché de l'

ÉNERGIE POTENTIELLE GRAVITATIONNELLE

TUE 302
Loi de gravitation
Gauss
Poids
Travail
Énergie potentielle
Travail
E vs g
Anomalie
Géoïde
Prospection
Page d'accueil
Page de Titre
Page 10 de 24
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Énergie potentielle

Définition: Formellement, on appelle énergie potentielle gravitationnelle la fonction $E_p(M)$ telle que :

$$m\,\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} E_p(M)$$

On a vu (définition):

$$\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} U(M)$$

où $U(M)$ est le champ potentiel de gravité en un point M de l'espace.

On en déduit:

$$E_p(M) = m\,U(M)$$

Soit en considérant le champ U dû à un corps de masse M^* (M^* étant situé à une distance r de la masse m),

$$E_p(M) = m\,U(M) = -\frac{\mathcal{G}M^*}{r}m + K'$$

Remarque : L'énergie potentielle est définie à une constante près.

Énergie potentielle

On revient à l'exemple du corps de masse m que l'on soulève de H_A à H_B. Calculons le travail des forces de gravité:

$$
\begin{aligned}
W_{A\to B} &= \int_{H_A}^{H_B} m\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{H_A}^{H_B} -m\ \overrightarrow{\mathrm{grad}U}\cdot\overrightarrow{dl} \\
&= \int_{H_A}^{H_B} -m\ dU = mU(H_A) - mU(H_B) \\
&= -\Delta E_p
\end{aligned}
$$

Le travail des forces de gravité est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle.

Dans notre exemple: le travail des forces de gravité est bien négatif et la variation d'énergie potentielle est bien positive puisqu'on s'élève dans le champ de gravité.

$$\Delta E_{H_A}^{H_B} = m\,(U(H_B) - U(H_A)) = -\Delta E_p$$

$\longrightarrow$ Ce que l'on sait bien calculer, ce sont les variations d'énergie potentielle, il n'existe pas en effet d'énergie potentielle absolue; **on calcule toujours le gain ou la perte d'énergie par rapport à un autre état.**

Par convention, on se fixe $E_p = 0$ où le poids (force de gravité) tend vers une valeur nulle: toujours en $r = \infty$.
Ainsi si on amène un corps de masse m d'un point H_A à l'infini où $E_P(H_B)$=0, on obtient:

$$E_p = -\frac{GmM}{r}$$

ÉNERGIE POTENTIELLE GRAVITATIONNELLE D'UNE MASSE m À UNE DISTANCE r DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CORPS DE MASSE M.

Travail des forces de pesanteur

Dans le **cas de la Terre**, calculons le travail des forces de pesanteur ainsi que la variation d'énergie potentielle pour un corps de masse m entre la surface de la Terre et une altitude $h = r - R$.

$$W_{0\to h} = \int_0^h \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_R^{R+h} mg\overrightarrow{e}_r\cdot dr\overrightarrow{e}r = -mM\mathcal{G}\int_R^{R+h}\frac{dr}{r^2}$$
$$= -m\mathcal{G}\left[-\frac{1}{R+h}+\frac{1}{R}\right] = -mM\left(U_h - U_0\right) = -\Delta E_p$$

Si on se place à basse altitude telle que que $h \ll R$:

$$W_{0\to h} = -mM\mathcal{G}\left[\frac{-R+R+h}{R^2+hR}\right] \simeq -mM\mathcal{G}\left[\frac{h}{R^2}\right] = mg_{(h=0)}h$$

Remarque : On voit que la variation d'énergie potentielle entre 0 et h est indépendante du chemin choisi. (normal puisqu'on calcule le travail d'une force qui équivaut ici à la circulation d'un vecteur qui dérive d'un potentiel, voir partie ①).
Conséquence : En montagne, monter tout droit ou en zigzaguant est identique en terme d'énergie accumulée (énergie potentielle) et en terme d'énergie dépensée ...

ÉLECTROSTATIQUE

q (Coulomb)

$$\overrightarrow{F}_{A/B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A\, q_B}{r^2}\overrightarrow{u}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{SI}$$

$$\overrightarrow{F}_{A/B} = q_B \overrightarrow{E}_A$$

$$\overrightarrow{E}_A(B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A}{r^2}\overrightarrow{u} \quad \text{(V/m)}$$

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

$$\text{où V=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} + \text{K}$$

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V \rho dV$$

$$\text{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

GRAVITÉ

m (kg)

$$\overrightarrow{F}_{A/B} = -\mathcal{G}\frac{m_A\, m_B}{r^2}\overrightarrow{u}$$

$$\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11}\text{SI}$$

$$\overrightarrow{F}_{A/B} = m_B\, \overrightarrow{g}_A$$

$$\overrightarrow{g}_A(B) = -\mathcal{G}\frac{m_A}{r^2}\overrightarrow{u} \quad \text{(m/s}^2\text{)}$$

$$\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}U$$

$$\text{où U} = -\mathcal{G}\frac{m}{r} + \text{K'} \quad \text{(K'=0)}$$

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}$$

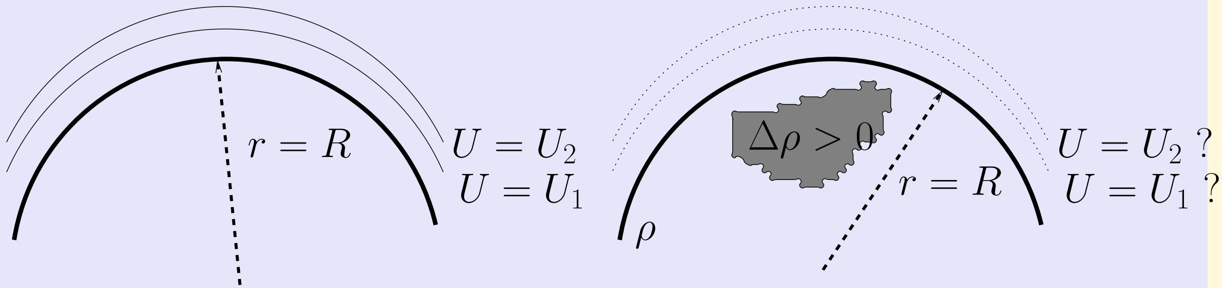
$$= -4\pi\mathcal{G}\iiint_{\mathcal{V}} \rho dV$$

$$\text{div}\,\overrightarrow{g} = -4\pi\mathcal{G}\rho$$

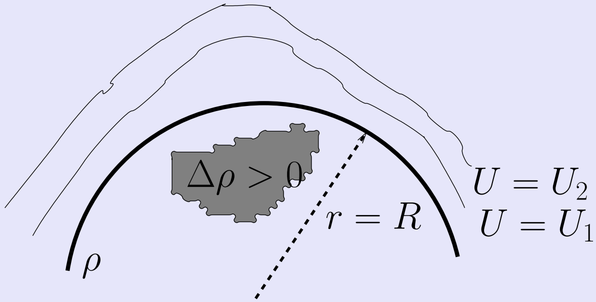
Influence d'une anomalie superficielle de densité sur le champ de gravité terrestre

Plaçons nous proche de la surface terrestre. Les lignes d'equipotentiel sont concentriques autour de la Terre si on suppose que la répartition de masse est homogène dans la Terre.

Imaginons maintenant qu'un événement géologique a induit une anomalie de masse (excès de masse) sous la surface terrestre. Quel est alors l'effet de cet anomalie de masse sur la répartition des equipotentiels ?



Réponse : Une bosse sur le potentiel de gravité (géoïde) :



Demonstration :

1) **Qualitative :** La gravité est plus forte localement avec l'excès de masse. Il faut augmenter r pour retrouver la même valeur de la gravité et du potentiel.

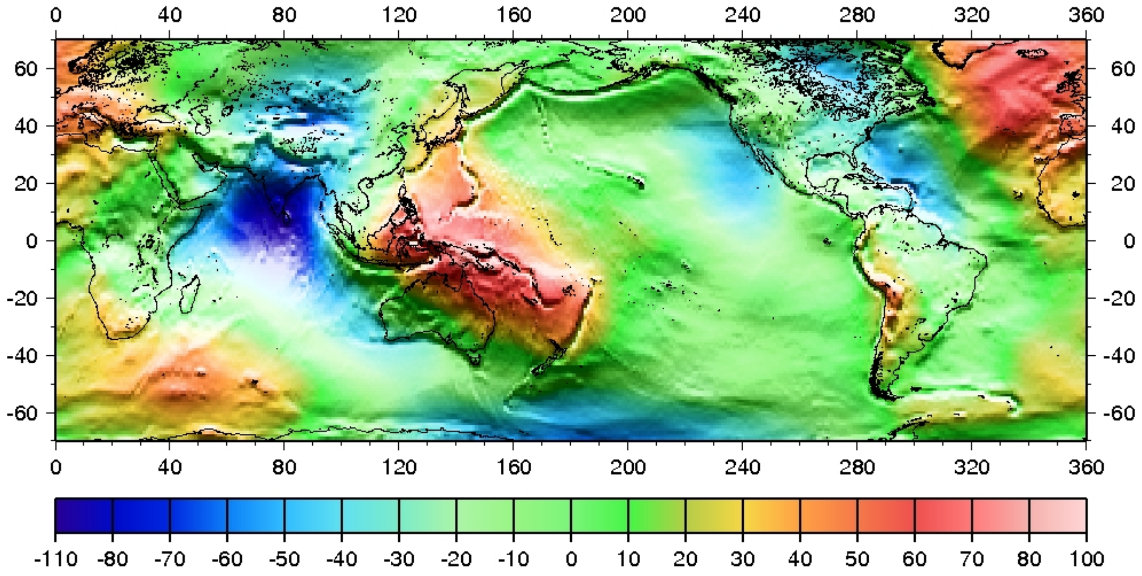
2) **Quantitative :** Sans anomalie de masse : $U(r = R) = -\mathcal{G}\dfrac{M}{R}$

Avec anomalie de masse : $U'(r = R) = -\mathcal{G}\left(\dfrac{M + \Delta m}{R}\right)$

Si on veut tracer une ligne d'equipotentiel, on doit chercher Δr tel que: $U'(r = R + \Delta r) = U(R) \quad \rightarrow -\mathcal{G}\left(\dfrac{M + \Delta m}{r}\right) = -\mathcal{G}\dfrac{M}{R}$

Il faut Δr > 0 pour trouver la ligne d'equipotentiel.

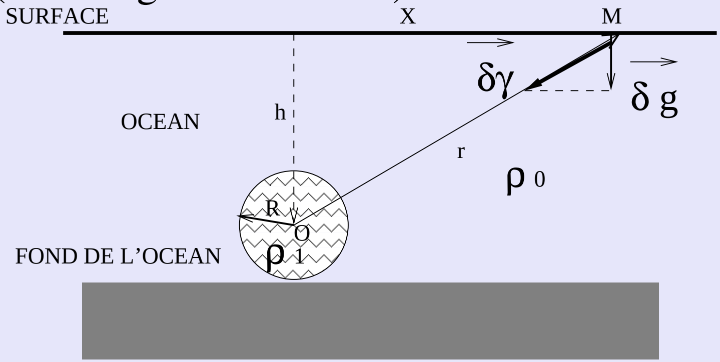
Géoïde observé



Application : prospection gravimétrique

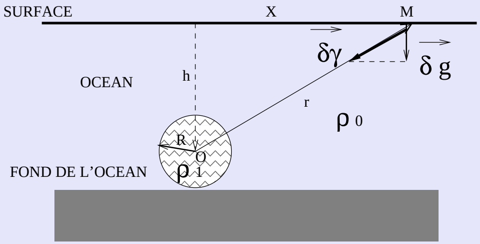
Exemple : Épave au fond d'un océan.

On veut tester l'efficacité de la prospection gravimétrique pour repérer certaines épaves qui reposent au fond des mers. Pour cela on dispose d'un gravimètre embarqué à bord d'un navire dont la précision est de 5 microgals. (1 microgal = 10^{-8}m/s^2).

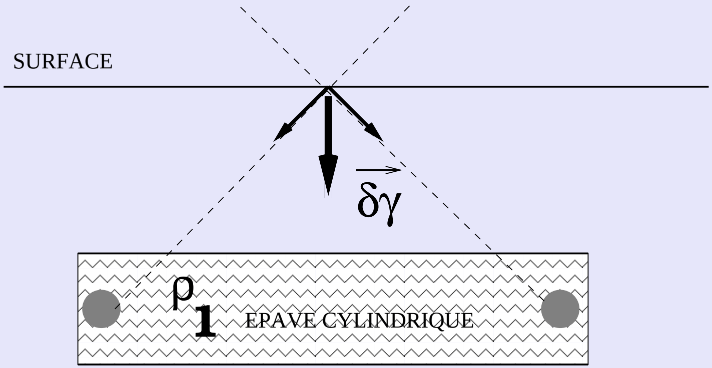


Pour simplifier les calculs, on suppose que l'épave recherchée est de forme cylindrique très allongée de longueur L, de rayon R (telle que $L/R \gg 1$) et de masse volumique ρ_1=1420 kg/m^3. Elle repose sur le fond de la mer à la profondeur de h=125 m. La masse volumique de l'eau est de ρ_0=1020 kg/m^3.

a) **En considérant une épave dont la longueur L est très grande, montrer à l'aide d'arguments de symétries pourquoi l'anomalie de gravité $\overrightarrow{\delta\gamma}$ n'a qu'une composante dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre.**



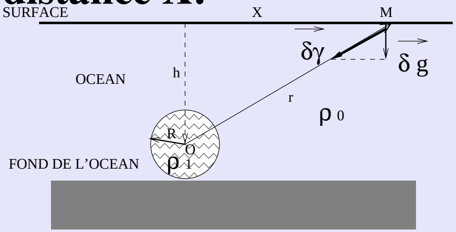
Réponse : Comme $L \gg R$, on peut comme le suggère l'énoncé se placer dans le cadre où l'épave est un cylindre infini : en se plaçant à la surface, $\forall X$, on constate que les contributions s'annulent deux à deux par symétrie excepté la composante $\overrightarrow{\delta\gamma}$.



b) **Appliquer alors le théorème de Gauss pour calculer l'anomalie gravimétrique en surface au point M, avec X la distance entre la projection à la surface de l'océan du centre de l'épave et le point de mesure en surface. On note que le théorème de Gauss s'écrit dans notre cas:**

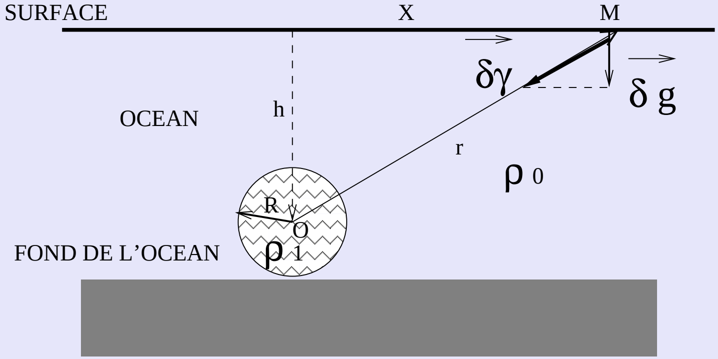
$$\Phi = \iint \overrightarrow{\delta\gamma} \cdot \overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}\Delta M_{\mathbf{int}}$$

où $\Delta M_{\mathbf{int}}$ est l'anomalie de masse liée à la présence de l'épave, dans notre cas cela correspond au surplus de masse puisque $\rho_1 > \rho_0$.Pourquoi est-il adapté de prendre comme surface de Gauss un cylindre de rayon r dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe de l'épave? Démontrer que l'on obtient au point M situé à une distance X:



$$\delta\gamma(X) = -\frac{2\pi\mathcal{G}R^2\Delta\rho}{\sqrt{h^2+X^2}} = -\frac{2\pi\mathcal{G}R^2(\rho_1-\rho_0)}{\sqrt{h^2+X^2}}$$

Réponse : On utilise $\Phi = \iint \overrightarrow{\delta\gamma} \cdot \overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}\Delta M_{\text{int}}$ où ΔM_{int} est l'anomalie de masse liée à la présence de l'épave.



$$\Phi = \iint \overrightarrow{\delta\gamma} \cdot \overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}\Delta M_{\text{int}}$$

où ΔM_{int} est l'anomalie de masse liée à la présence de l'épave.

$$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\delta\gamma} \cdot \overrightarrow{dS} = \oiint_{\mathcal{S}} (\delta\gamma(r)\overrightarrow{e}_r) \cdot (dS\,\overrightarrow{e}_r) = \delta\gamma(r)\; 2\pi r L = -4\pi\mathcal{G}\,\pi\,R^2\,(\rho_1 - \rho_0)\,L$$

valable $\forall$ M situé sur un cercle de rayon r,

$$\rightarrow \delta\gamma(r) = -\frac{2\pi\;\mathcal{G}\;R^2\;\Delta\rho}{r}$$

C'est vrai en particulier pour M à la surface terrestre, en X.

$$\rightarrow \delta\gamma(X) = -\frac{2\pi\;\mathcal{G}\;R^2\;\Delta\rho}{\sqrt{X^2 + h^2}}$$

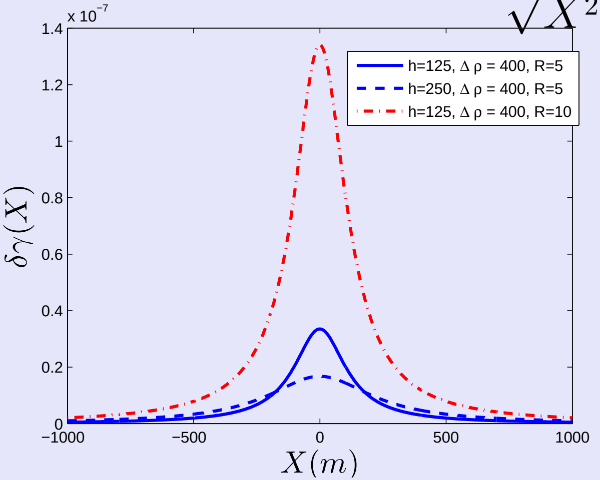
TUE 302
Loi de gravitation
Gauss
Poids
Travail
Énergie potentielle
Travail
E vs g
Anomalie
Géoïde
Prospection
Page d'accueil
Page de Titre
Page 22 de 24
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

c) **En déduire l'expression de la composante verticale $\overrightarrow{\delta g}$ de l'anomalie de gravité lié à la présence de l'épave en fonction de G,R,h,$\Delta\rho$ et X. Tracer qualitativement l'allure de $\overrightarrow{\delta g}$ quand on se déplace à la surface de la Terre (en faisant varier X). Comment varie la courbe si on fait varier h ou R ?**

Réponse : On pose $\cos\theta = \dfrac{\delta g}{\delta\gamma}$, soit $\delta g = \cos\theta\ \delta\gamma = \dfrac{h}{\sqrt{X^2+h^2}}\,\delta\gamma$.

$$\rightarrow \delta g(X) = -\frac{2\pi\ \mathcal{G}\ R^2\ h\ \Delta\rho}{X^2+h^2}.$$

Considérons maintenant que h est fixe et que l'on se déplace en X : l'anomalie de gravité évolue alors comme $\propto \dfrac{A}{\sqrt{X^2+B}}$.



TUE 302
Loi de gravitation
Gauss
Poids
Travail
Énergie potentielle
Travail
E vs g
Anomalie
Géoïde
Prospection
Page d'accueil
Page de Titre
Page 23 de 24
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

d) **On se place en X=0. Exprimer $\overrightarrow{\delta g}(X = 0)$. En déduire la valeur numérique minimale de R pouvant être détectée avec le gravimètre embarqué à bord du navire.**

Réponse : En $X = 0$,

$$\delta g(0) = \frac{2\pi\,\mathcal{G}\,R^2\,h\,\Delta\rho}{h^2} = \frac{2\pi\,\mathcal{G}\,R^2\,\Delta\rho}{h}.$$

Application numérique : si si $\delta g = 5\ 10^{-8}$ m/s^2

$$\rightarrow 5\ 10^{-8} = \frac{2\pi\ 6.67\ 10^{-11}\ R^2\ 4\ 10^2}{1.25\ 10^2},$$

d'où

$$R^2 = \frac{1.25\ 10^2\ 5\ 10^{-8}}{2\ \pi\ 6.67\ 10^{-11}\ 4\ 10^2} \rightarrow R \approx 6\ \text{m}.$$