Licence 3 – Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement

Université Joseph-Fourier

TUE 302 : Outil Physique et Géophysique

② Le champ électrostatique $\vec{E}$

Daniel.Brito@ujf-grenoble.fr
MAISON DES GÉOSCIENCES
UNIVERSITÉ JOSEPH–FOURIER
04 76 82 80 42

Les charges électriques

Interaction électromagnétique entre les particules et les corps chargés. *Exemple*: Baguette de caoutchouc que l'on frotte sur un morceau de tissu.

Première partie du cours: **charges ponctuelles** : particules chargées dont les dimensions sont petites devant les distances qui séparent les charges.

Interaction électrostatique: Interaction électromagnétiques correspondant aux situations où les charges ponctuelles sont immobiles dans le référentiel du laboratoire considéré.

Les charges électriques

Charges positives, négatives, neutres.
Exemple: atome.

Corps chargé: à l'échelle macroscopique

$$Q = (n_+ - n_-)\ e$$

Q charge totale du corps considéré.
n_+ nombre de charges $+$ élémentaires.
n_- nombre de charges $-$ élémentaires.

$\mid e \mid = 1.6\ 10^{-19}$ Coulomb *(unité de charge)*

Les charges électriques

Exercice: Calculer la force électrostatique s'exerçant entre deux charges $q_A = q_B = 1\text{C}$ séparées de 1 m.

$F \simeq 9\ 10^9$ N

(Il faut $2.3\ 10^{-5}$ g de Cuivre pour avoir une charge de 1 C).

Le poids d'un corps de 1 kg soumis à l'attraction gravitationnelle est 9.8 N.

Calculer la force gravitationnelle s'exerçant entre deux masses $m_A = m_B = 1$ kg séparées de 1 mètre.

$F \simeq 6.7\ 10^{-11}$ N

Conclusions $F_E \simeq 10^{20} F_g$

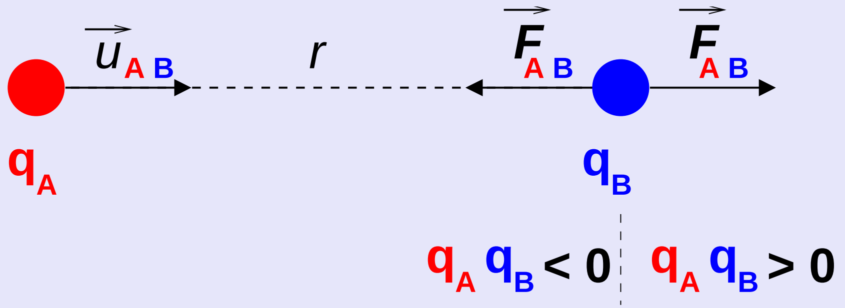
Pourquoi ??

Loi de Coulomb

Loi de Coulomb: Expression de la force électrostatique s'appliquant entre deux charges séparé d'une distance r

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{A\to B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A q_B}{r^2}\overrightarrow{u}_{A\to B} = -\overrightarrow{F}_{B\to A}}$$

$\overrightarrow{F}_{A\to B}$: force exercée par la charge q_A sur la charge q_B.



Conditions :

✓ Le vide existe entre les deux charges.

✓ la taille de q_A et $q_B \ll r$.

Page d'accueil
Page de Titre
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 5 de 44
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Loi de Coulomb

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{A\to B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A q_B}{r^2}\overrightarrow{u}_{A\to B} = -\overrightarrow{F}_{B\to A}}$$

Champ électrostatique

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A}{r^2}\overrightarrow{u}_{A\to B}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{B=q_B}\overrightarrow{E}_{A}}$$

Principe de superposition

Loi de Coulomb:

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{q_A q_B}}{r^2}\overrightarrow{u}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -\overrightarrow{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}}$$

Principe de superposition:

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\to\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{q_i q_B}}{r^2}\overrightarrow{u}_{\mathrm{i}\to\mathrm{B}}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{\to\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{q_i}}{r^2}\overrightarrow{u}_{\mathrm{i}\to\mathrm{B}}}$$

Densité de charges

On peut aussi écrire les forces électrostatiques $\overrightarrow{F}_{\vec{E}}$ sous des formes intégrales afin de ne pas considérer que des charges ponctuelles mais plutôt des corps chargé (en surface, en volume etc...).
$\longrightarrow$ **Densité de charge**

Considérons un corps chargé, de volume $\mathcal{V}$. On considère un **petit élément de volume** $\Delta\tau$, grand devant l'échelle atomique.
Par définition, on dit que le rapport entre la somme des charges ΔQ contenue dans le volume $\Delta\tau$ et le volume lui-même :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta \tau} = \rho(M)$$

où M est le point situé au centre de $\Delta\tau$ et ρ est la **densité volumique de charge électrostatique**.

$\rho(M)$ est le champ scalaire qui sert à caractériser la distribution volumique macroscopique de la charge à l'échelle microscopique.

$$\boxed{Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(M)\ d\tau}$$

De la même manière, on peut considérer une **distribution superficielle de charge électrostatique** dans le cas où les charges sont concentrées sur une très faible épaisseur vis-à-vis de la taille du corps.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta s} = \sigma(M)$$

où M est le point situé au centre de la petite surface Δs et σ est la **densité superficielle de charge électrostatique**.

$\sigma(M)$ caractérise la distribution surfacique macroscopique de la charge à l'échelle microscopique.

$$\boxed{Q = \iint_S \sigma(M)\, ds}$$

A considérer aussi **la distribution linéïque de charge**:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta l} = \lambda(M)$$

où M est le point situé au centre de la petite longueur Δl et λ est la **densité linéïque de charge électrostatique**.

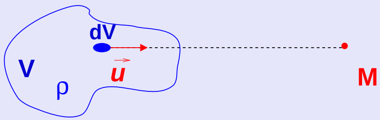
$$\boxed{Q = \int_{\mathcal{L}} \lambda(M)\, dl}$$

Écriture intégrale de $\overrightarrow{E}(M)$

Avec les densités de charge, on peut réécrire le champ électrostatique

$$\overrightarrow{E}_q(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u}_{q\to M}$$

✓ Pour une **distribution volumique de charge**



$$\overrightarrow{E}(M) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(r)\overrightarrow{u}}{r^2}d\tau$$

✓ Pour une **distribution surfacique ou superficielle de charge**

$$\overrightarrow{E}(M) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma(r)\overrightarrow{u}}{r^2}dS$$

✓ Pour une **distribution linéïque de charge**

$$\overrightarrow{E}(M) = \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda(r)\overrightarrow{u}}{r^2}dl$$

Page d'accueil
Page de Titre
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 10 de 44
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Démarche dans les exercices

1. Lire complètement l'énoncé.

2. Choisir un système de coordonnées approprié au problème.

3. Regarder les symétries du problème. Règle de base:
   Un plan est appelé plan de symétrie d'un problème si, après une symétrie par rapport à ce plan, les sources du champ sont inchangées. **Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ appartient nécessairement à tout plan de symétrie des charges.**

4. Écrire la formule intégrale du champ $\overrightarrow{E}$ soit linéïque, surfacique ou volumique. En général on est amené à exprimer un élément linéïque, surfacique, volumique.

5. Calculer ensuite composante par composante le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$. En général on projette $\overrightarrow{E}$ de la manière suivante:

$$E_i(M) = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{e}_i = \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{dE} \cdot \overrightarrow{e}_i$$

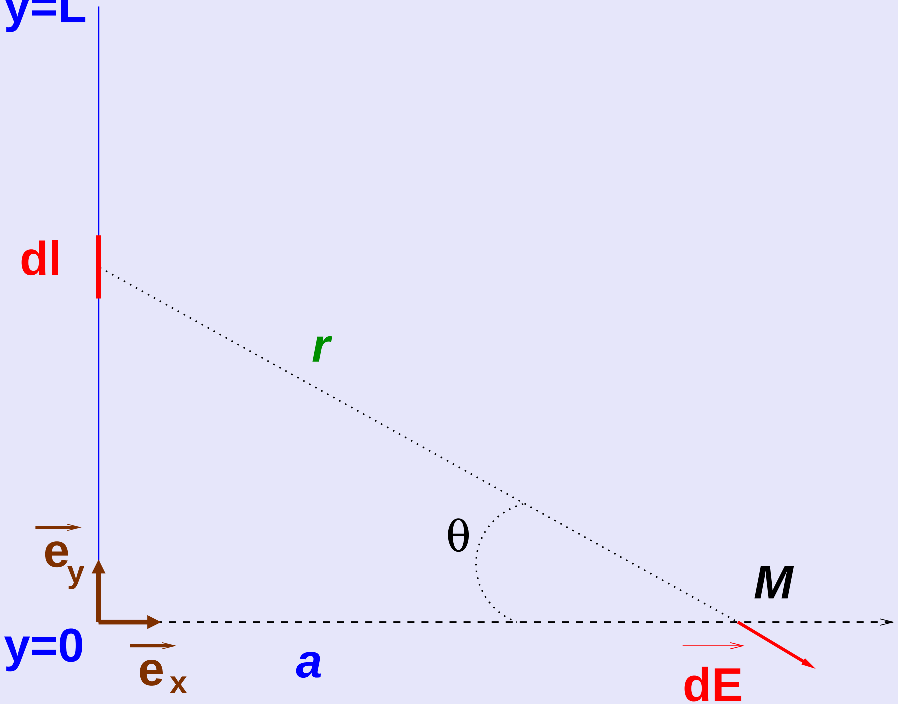
   ce qui amène à calculer des produits scalaires entre $\overrightarrow{u}$ et les vecteurs unitaires des systèmes de coordonnées considérés ...

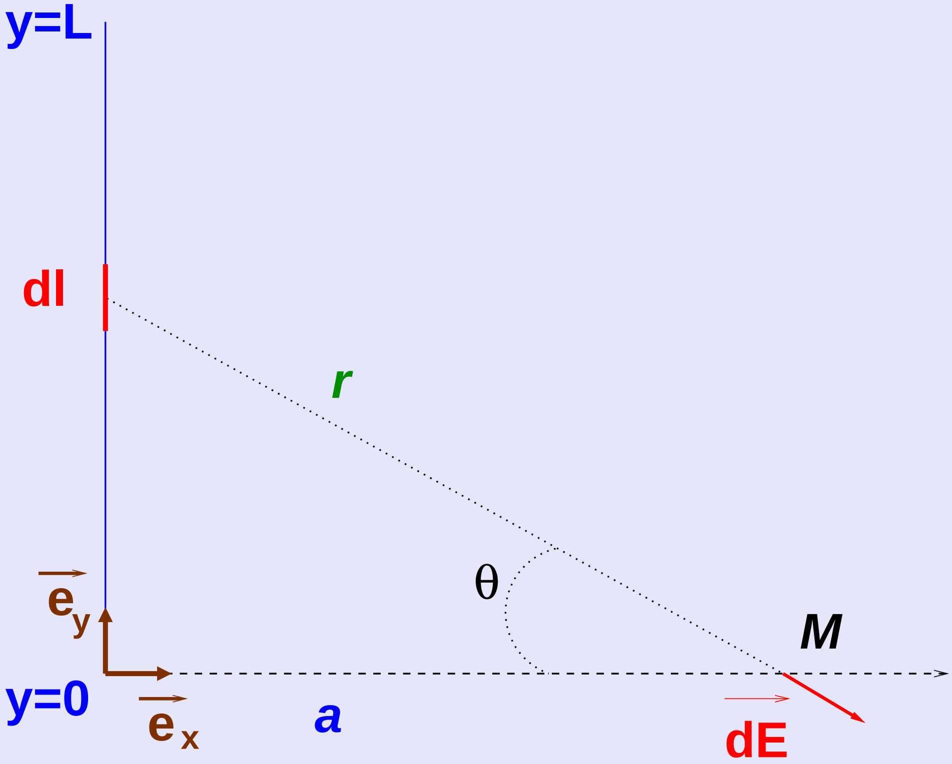
6. Vérifier le calcul avec l'homogénéité des formules d'une part, des cas connus de répartitions de charge d'autre part.

Premier exemple:

$\overrightarrow{E}$ pour un segment de longueur finie L

1. *Énoncé*: Calculer le champ électrostatique au point M ($y = 0$, figure ci-dessous) pour une distribution de charge linéïque λ constante sur un segment de longueur finie L.

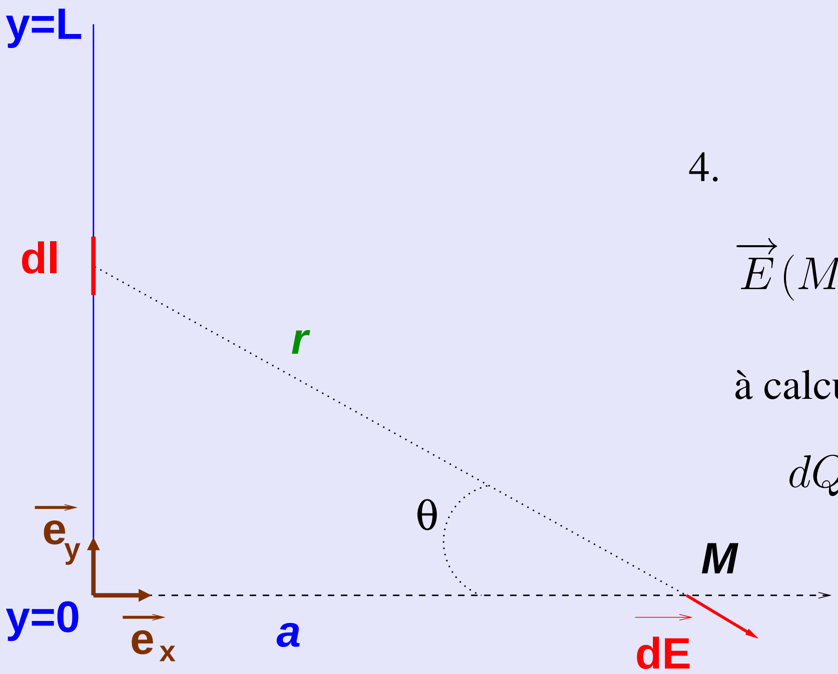




2. On choisit un système de coordonnées cartésiennes, en particulier (O, x, y).

3. Symétrie de révolution autour de (O, y).

   Au point M ($y = 0,\ \forall x, z$) le champ $\overrightarrow{E}$ est nécessairement contenu dans la plan (O, x, y) : E_x et E_y à calculer.



4.

$$\vec{E}(M) = \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \vec{u}}{\mathrm{r}^2} \mathrm{dl}$$

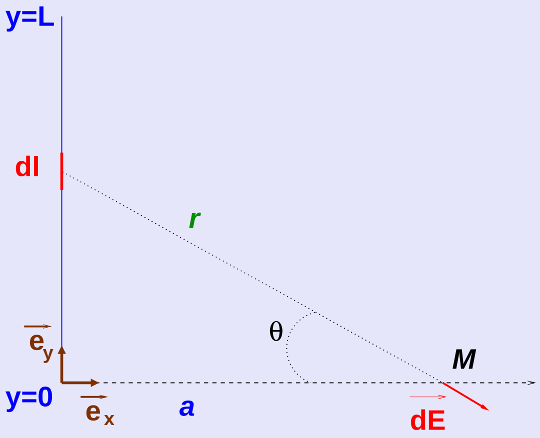
à calculer

$$dQ = \lambda dl$$

5. Calcul de la composante E_x:

$$E_x(M) = \vec{E} \cdot \vec{e}_x = \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \vec{u} \cdot \vec{e}_x}{\mathrm{r}^2} \mathrm{dl} = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cos\theta}{\mathrm{r}^2} \mathrm{dy}$$

puisque $\vec{u} \cdot \vec{e}_x = \cos\theta$ et $dl = dy$.



$$E_x(M) = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\cos\theta}{\mathrm{r}^2}\mathrm{dy}$$

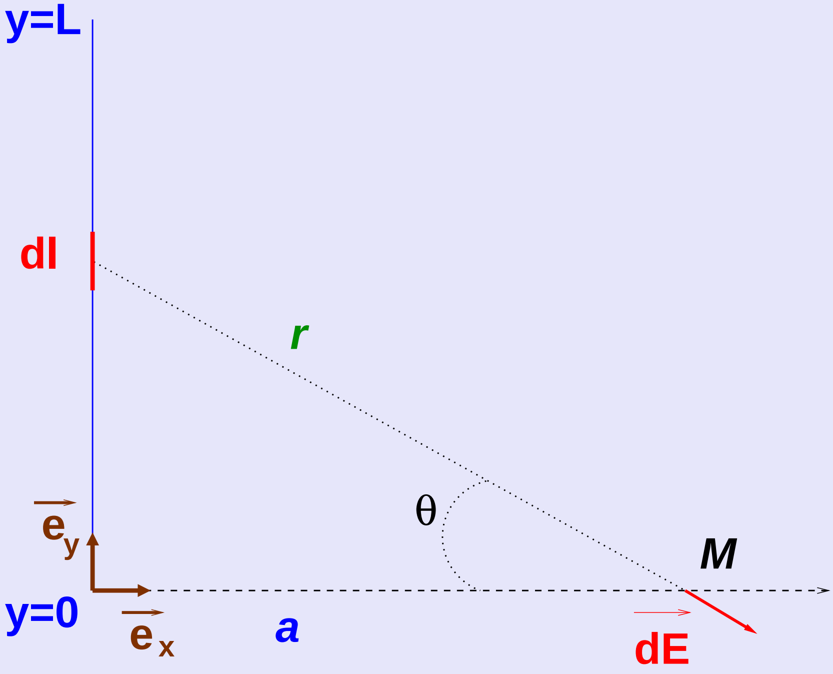
On doit intégrer sur une variable or ici, on a 3 variables: θ, y et r.
On choisit d'exprimer y et r en fonction de θ:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{a},\ \ y = \tan\theta\ a,\ \ dy = \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r},\ \ r = \frac{a}{\cos\theta}$$

$$\rightarrow E_x(M) = \int_O^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\cos\theta}{\mathrm{r}^2}\mathrm{dy} = \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_L} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\cos\theta\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{a}^2}\frac{\mathrm{a\ d}\theta}{\cos^2\theta}$$

Page d'accueil
Page de Titre
Page 15 de 44
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

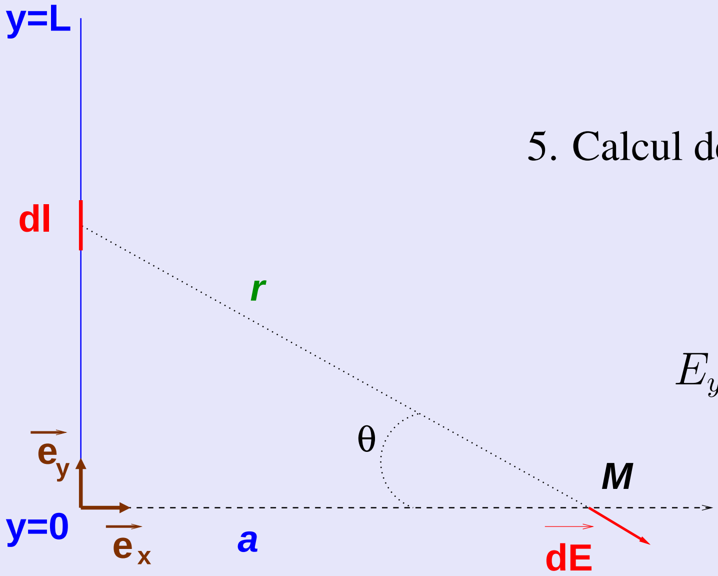


$$\rightarrow E_x(M) = \int_O^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\cos\theta}{\mathrm{r}^2}\mathrm{dy} = \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_L}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\cos\theta\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{a}^2}\frac{\mathrm{a\ d}\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\rightarrow E_x(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\theta_L}\frac{\cos\theta}{a}d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\sin\theta_L$$

$$E_x(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\frac{L}{\sqrt{a^2+L^2}}$$

$$E_x(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{a}\,\frac{L}{\sqrt{a^2+L^2}}$$



5. Calcul de la composante E_y:

$$E_y(M) = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{e}_y$$

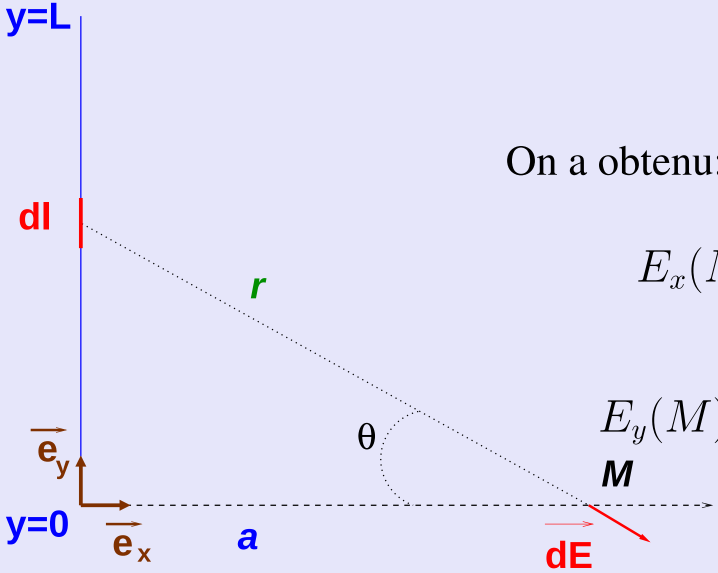
$$E_y(M) = -\int_O^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\sin\theta}{\mathrm{r}^2}\mathrm{dy}$$

puisque $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e}_y = -\sin\theta.$

$$E_y(M) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\theta=\theta_L}\frac{\sin\theta}{a}d\theta = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}(\cos\theta_L - \cos 0)$$

$$E_y(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+L^2}} - 1\right)$$

$\overrightarrow{E}$ pour $\mathcal{L}$



On a obtenu:

$$E_x(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\left(\frac{L}{\sqrt{a^2+L^2}}\right)$$

$$E_y(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+L^2}}-1\right)$$

6. Vérification des résultats.

✓ E_x et E_y sont homogènes.

✓ Faisons croître a telle que $a \gg L$. On devrait alors voir le segment L comme une charge ponctuelle de charge électrique λL ??? .

Page d'accueil
Page de Titre
Page 18 de 44
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

On a

$$E_x(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\left(\frac{L}{\sqrt{a^2+L^2}}\right)$$

$$E_y(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+L^2}} - 1\right)$$

Si $a \gg L$, alors on peut poser $\varepsilon = \dfrac{L}{a}$

- ✓ Pour E_x,

$$E_x(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\left(\frac{L}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda L}{a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^2}$$

- ✓ Pour E_y,

$$E_y(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} - 1\right)$$

Or

$$\lim_{\varepsilon\to\mathbf{0}} (\mathbf{1}+\varepsilon)^{\mathbf{n}} \simeq \mathbf{1} + \mathbf{n}\varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^{\mathbf{2}})$$

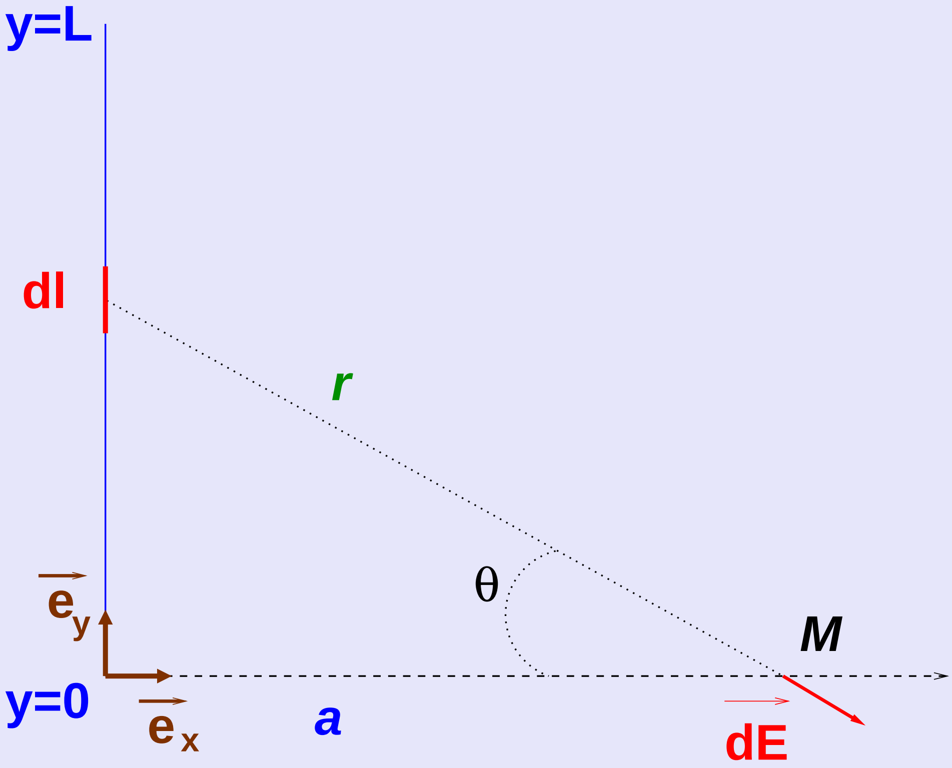
✓ Pour E_y,

$$E_y(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} - 1\right)$$

$$\lim_{\boldsymbol{\varepsilon\to 0}} (\mathbf{1}+\varepsilon)^{\mathbf{n}} \simeq \mathbf{1} + \mathbf{n}\varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^{\mathbf{2}})$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_y(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\varepsilon^2} - 1\right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - 1\right)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_y(M) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, L}{a^2}\right)\frac{-L}{2a} = -\frac{1}{2}\varepsilon\, E_x$$



En conclusion:
si $a \gg L$,

$$E_x(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^2} \quad , \quad E_y(M) = -\frac{L}{2a}\, E_x$$

Calcul de $\overrightarrow{E}$

3 méthodes pour le calcul de $\overrightarrow{E}$:

❶ Calcul direct:

$$\overrightarrow{E}(M) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(r)\overrightarrow{u}}{r^2} d\tau \text{ distribution volumique de charge}$$

$$\overrightarrow{E}(M) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(r)\overrightarrow{u}}{r^2} dS \text{ distribution surfacique de charge}$$

$$\overrightarrow{E}(M) = \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(r)\overrightarrow{u}}{r^2} dl \text{ distribution linéïque de charge}$$

❷ Calcul du potentiel électrostatique V puis du champ $\overrightarrow{E}$.

❸ Calcul de $\overrightarrow{E}$ via le théorème de Gauss.

❷ Définition du Potentiel électrostatique

Soit une charge q placée à l'origine d'un repère de coordonnées. Calculons la circulation de $\overrightarrow{E}$ correspondant à un petit déplacement $\overrightarrow{dM}$ à partir du point M:

$$dC = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} + K\right)$$

$$\rightarrow \qquad dC = -dV \text{ avec } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} + K$$

Pour une charge unique, la circulation d'un point fictif en présence du champ $\overrightarrow{E}$ est une différentielle totale:

$$dC = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dM} = -dV \text{ or } dV = \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \overrightarrow{dM}$$

On en déduit que pour une charge ponctuelle :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \text{ avec } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} + K$$

Définition du Potentiel électrostatique V

Deuxième définition du potentiel

Soit à nouveau une charge q dans l'espace et le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e}_r$ associé. Déplaçons maintenant une charge Q d'un point A à un point B en présence de $\overrightarrow{E}$. Par définition, **le travail** qu'il faut fournir pour effectuer ce déplacement s'écrit:

$$W_{A\to B} = \int_{AB} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dl} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\, Q \int_{AB} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\, Q \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

On écrit alors

$$W_{A\to B} = -Q\, V_{AB}$$

où

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Par définition, V_{AB} est la différence de potentiel entre les points A et B.

Potentiel électrostatique V

Une charge unique q donne naissance à un champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}$, et un un potentiel électrostatique

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} + K$$

avec

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V.$$

Le principe de superposition demeure valide pour le potentiel électrostatique

$$\overrightarrow{E}_{\to B} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\overrightarrow{u}_{i\to B}$$

$$V(B) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$$

Écriture intégrale du potentiel

❶ Calcul direct:

$$\overrightarrow{E}(M) = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(r)\overrightarrow{u}}{r^2}d\tau \text{ distribution volumique de charge}$$

$$\overrightarrow{E}(M) = \iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma(r)\overrightarrow{u}}{r^2}dS \text{ distribution surfacique de charge}$$

$$\overrightarrow{E}(M) = \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda(r)\overrightarrow{u}}{r^2}dl \text{ distribution linéïque de charge}$$

❷ Calcul du potentiel électrostatique V puis du champ $\overrightarrow{E}$, avec $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

$$V(M) = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0\, r}d\tau \text{ distribution volumique de charge}$$

$$V(M) = \iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0\, r}dS \text{ distribution surfacique de charge}$$

$$V(M) = \int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0\, r}dl \text{ distribution linéïque de charge}$$

❸ Théorème de Gauss

Énoncé: **Le flux du champ électrostatique généré par une distribution de charges électrostatique (charge totale Q) sortant d'une surface fermée est nulle si la charge est à l'extérieur de la surface $\mathcal{S}$ (surface de Gauss) et vaut $\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ si la charge est à l'intérieur de $\mathcal{S}$.**

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Attention: Le calcul du champ électrostatique via le théorème de Gauss s'y prête dans des cas bien particuliers de symétries. En particulier, il n'est pas évident en général d'avoir le champ électrostatique partout dans l'espace avec cette méthode: on a en effet le champ *a priori* qu'en bordure de la surface de Gauss.

Relation de Maxwell

Le théorème de Gauss

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

peut se réécrire :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau$$

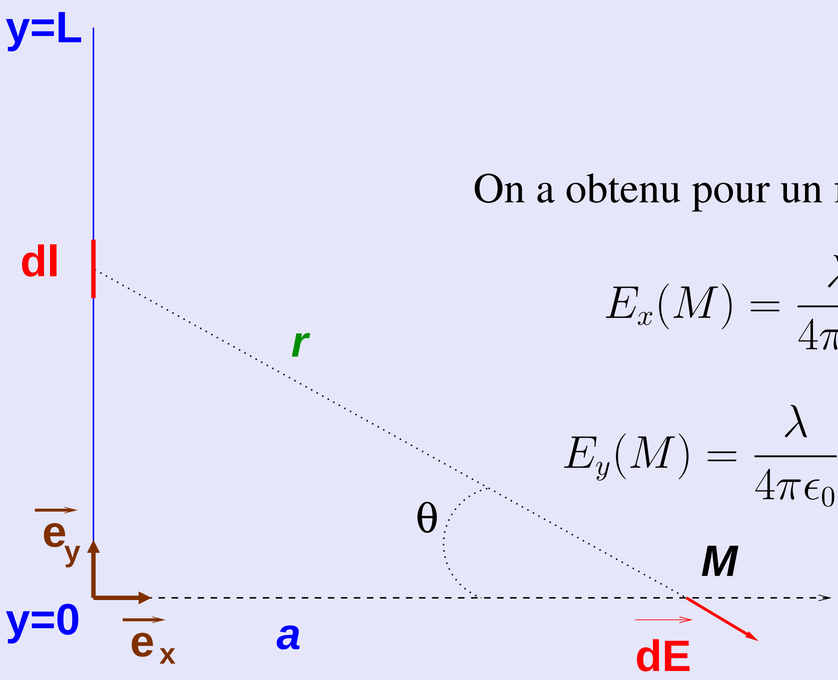
Théorème de Green-Ostrogradsky

$$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \overrightarrow{E} \, d\tau \quad \text{d'où}$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

théorème de Gauss en forme différentielle, et qui est une des relations de Maxwell (Électromagnétisme).

$\overrightarrow{E}$ pour un fil de longueur infinie

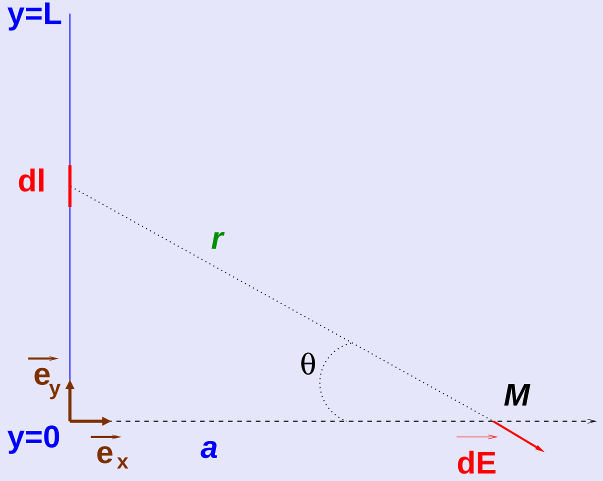


On a obtenu pour un fil de longueur fini L:

$$E_x(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\left(\frac{L}{\sqrt{a^2+L^2}}\right)$$

$$E_y(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+L^2}}-1\right)$$

$\overrightarrow{E}$ pour un fil de longueur infinie



Pour un segment soit de longueur infinie:

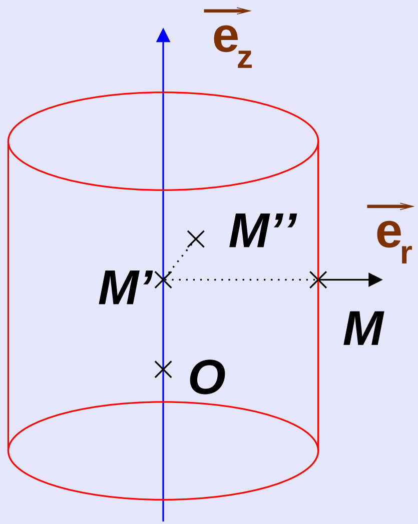
$$E_x(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{a} d\theta \text{ au lieu de } \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\theta_L} \frac{\cos\theta}{a} d\theta$$

$$E_y(M) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{a} d\theta \text{ au lieu de } -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\theta_L} \frac{\sin\theta}{a} d\theta$$

D'où:
$$E_y = 0, \quad E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}$$

Théorème de Gauss pour un fil infini

1. On adopte les coordonnées cylindriques.



2. Plaçons nous en point M comme sur la figure. Un plan (O, M, M') est plan de symétrie. Le plan (M, M', M'') est plan de symétrie aussi.

$\overrightarrow{E}$ **est radial au point** M.

$$E_r(r, \theta, z) \neq 0,$$
$$E_\theta(r, \theta, z) = 0,$$
$$\text{et } E_z(r, \theta, z) = 0$$

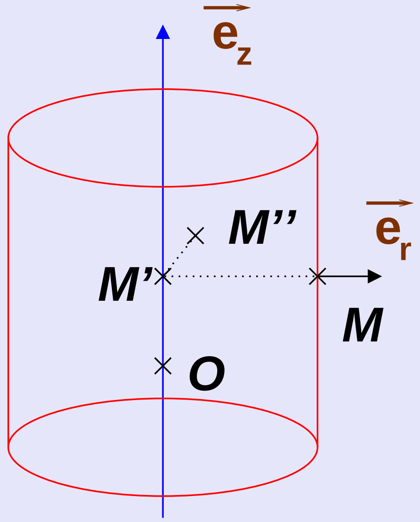
Si on déplace sur l'axe (O, z), la distribution de charges reste invariante. E_r ne dépend pas de z.

Si on effectue une rotation autour de (O, z), $i.e.$ on varie θ, la distribution reste invariante. On en conclut que E_r ne dépend que de la variable r.

$$\overrightarrow{E} = E_r(r)\overrightarrow{e}_r$$

TUE 302
Les charges ...
Loi de Coulomb
Superposition
Densité de charges
Écriture intégrale
Démarche exercices
Exemple: charges ...
Potentiel V
Théorème de Gauss
Relation Maxwell
Exemple: fil infini
Dipole Électrostatique
Page d'accueil
Page de Titre
Page 31 de 44
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Théorème de Gauss pour un fil infini



3. On peut maintenant appliquer le théorème de Gauss

$$\Phi = \oiint_{S} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

sur une surface de Gauss bien choisie. Laquelle ?

Surface de Gauss : le cylindre de centre 0 passant par M.

Les flux de $\overrightarrow{E}$ sur les bases supérieures et inférieures sont nuls. Il ne reste que le flux sur les parois latérales du cylindre :

$$\oiint_{S} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \oiint_{S} E(r)\overrightarrow{e}_r \cdot dS\overrightarrow{e}_r$$

$$= 2\pi r E(r)\ h = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda\ h}{\epsilon_0}$$

$$\overrightarrow{E} = E_r\overrightarrow{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\overrightarrow{e}_r$$

Comparaison calcul direct et théorème de Gauss

On a obtenu en coordonnées cartésiennes avec le calcul direct (intégration d'une distribution linéïque de charges),

$$E_y = 0 \qquad E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \;\; \forall\, a$$

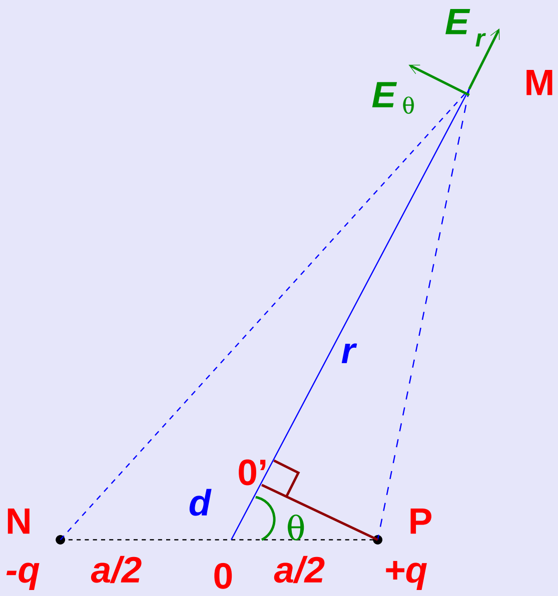
C'est bien identique à

$$\overrightarrow{E} = E_r \overrightarrow{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \overrightarrow{e}_r$$

en coordonnées cylindriques, obtenu en utilisant le théorème de Gauss.

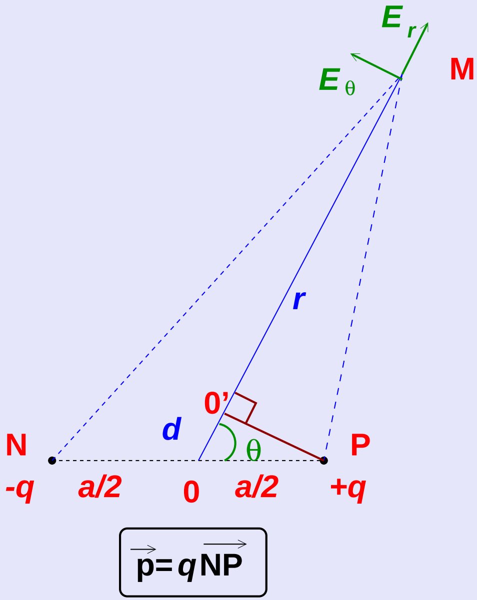
Le dipole électrostatique

Définition: Un dipole électrostatique est un système constitué de 2 charges électriques opposées $-q$ et q placées en 2 points N et P tel que $a = NP$, $a \ll$ devant toutes les distances considérées dans le problème.



$$\boxed{\vec{p} = q\,\overrightarrow{NP}}$$

Dipole électrostatique



Par définition le moment dipolaire s'écrit

$$\overrightarrow{P} = q\overrightarrow{NP} \text{ avec } [p] = \mathrm{C.m}$$

On va calculer le champ électrostatique généré par un dipole, *via* un calcul utilisant le potentiel électrostatique.

Calcul du potentiel électrostatique V du dipole en un point M situé à une distance r de l'origine O.

On se place dans le plan $(\overrightarrow{NP}, M)$.
En appliquant le principe de superposition, on écrit:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{MP} - \frac{1}{MN}\right)$$

On utilise alors une relation valable quel que soit le triangle ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

où a, b et c sont les 3 longueurs des côtés du triangle et $\widehat{A}$ l'angle défini par les deux côtés b et c.

$$\begin{aligned} MN^2 &= r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\frac{ar}{2}\cos\theta = r^2\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2\right) \\ MP^2 &= r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\frac{ar}{2}\cos\theta = r^2\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2\right) \end{aligned}$$

$$MN^2 = r^2\left(1+\frac{a}{r}\cos\theta+\left(\frac{a}{2r}\right)^2\right)$$
$$MP^2 = r^2\left(1-\frac{a}{r}\cos\theta+\left(\frac{a}{2r}\right)^2\right)$$

Selon les hypothèses $\frac{a}{r} \ll 1$

$$\frac{1}{MP}-\frac{1}{MN} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a}{r}\cos\theta}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{r}\cos\theta}}\right]$$
$$\simeq \frac{1}{r}\left[1+\frac{a}{2r}\cos\theta-1+\frac{a}{2r}\cos\theta\right]$$
$$= \frac{1}{r}\left[\frac{a}{r}\cos\theta\right]$$

$$\rightarrow V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{a}{r^2}\,\cos\theta$$

ou encore en considérant les coordonnées polaires avec $M(r,\theta)$, $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$, $\overrightarrow{p} = qa\overrightarrow{e}_{\overrightarrow{NP}}$,

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{u}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{p\,\cos\theta}{r^2}$$

Détermination du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ du dipole en un point M situé à une distance r de l'origine O.

$(\overrightarrow{NP}, M)$ est plan de symétrie pour la distribution de charges. Le champ $\overrightarrow{E}$ a donc deux composantes au point M: E_r et E_θ.

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\,\cos\theta}{r^2}\right)}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{p\,\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\,\cos\theta}{r^2}\right)}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\,\sin\theta}{r^3}$$

Remarque: Le champ électrostatique généré par un dipole décroît en r^3, contrairement au champ généré par une charge ponctuelle qui décroît en r^2.

Exercice: Tracer les **lignes de champ** (ligne tangentes au vecteur $\overrightarrow{E}$ en chaque point) et les **lignes d'equipotentiel** (V =constante). Vérifier entre autre que les equipotentiels sont bien perpendiculaires aux lignes de champ.

Dipole électrostatique

Tracé des lignes d'equipotentiel :
On cherche les lignes dans le plan $(\overrightarrow{NP}, M)$ tel que le potentiel V soit constant, soit:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\ \cos\theta}{r^2} = K$$

Cette équation équivaut à

$$r^2 = \frac{p\ \cos\theta}{K\ 4\pi\epsilon_0} = A\cos\theta \text{ où } A = \frac{p}{K\ 4\pi\epsilon_0}.$$

Pour tracer les equipotentiels, on fait alors varier A.

En coordonnées polaires

$$r^2 = A\cos\theta \text{ où } A = \frac{p}{K\ 4\pi\epsilon_0}.$$

Prenons $A = 1$ et traçons l'equipotentiel associée :

$$r^2 = \cos\theta \quad \rightarrow r = \sqrt{\cos\theta} \text{ puisque } r^2 > 0 \text{ d'où } \theta \in \left[3\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Prenons $A = -1$ et traçons l'equipotentiel associée :

$$r^2 = -\cos\theta \quad \rightarrow r = -\sqrt{\cos\theta} \text{ puisque } r^2 > 0 \text{ d'où } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right]$$

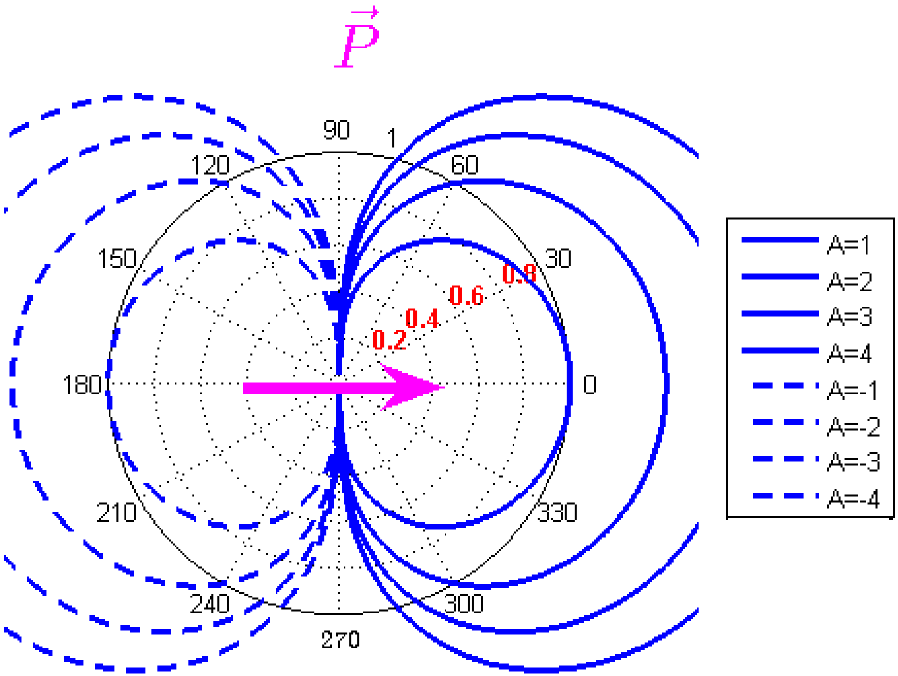
C'est logique, les equipotentiels positives sont proches de la charge q et les equipotentiels negatives proches de la charge $-q$.

En coordonnées cartésiennes

En prenant, $r^2 = x^2 + y^2$ et $\cos\theta = x/\sqrt{x^2+y^2}$, on obtient

$$y = \pm\sqrt{(Ax)^{2/3} - x^2}$$

Isopotentiels d'un dipôle électrostastique



Dipole électrostatique

Tracé des lignes de champ :
Par définition, les lignes de champ de $\overrightarrow{E}$ sont des courbes tangentes au vecteur $\overrightarrow{E}$ en chaque point.
Pour tracer les lignes de champ dans notre problème, on écrit que si on se déplace dans le plan $(\overrightarrow{NP}, M)$ d'un point M à un point M' (tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dM}$) le long d'une ligne de champ, alors nécessairement $\overrightarrow{dM}$ est **colinéaire** au champ $\overrightarrow{E}$ ou encore

$$\overrightarrow{dM} = k\,\overrightarrow{E} \text{ où k est une constante}$$

En coordonnées polaires, un déplacement élémentaire s'écrit:

$$\overrightarrow{dM} = dr\,\overrightarrow{e}_r + rd\theta\,\overrightarrow{e}_\theta$$

$$\rightarrow dr\,\overrightarrow{e}_r + rd\theta\,\overrightarrow{e}_\theta = k\Big(E_r\,\overrightarrow{e}_r + E_\theta\,\overrightarrow{e}_\theta\Big)$$

$$
\begin{aligned}
dr &= k\ E_r \text{ et } r d\theta = k\ E_\theta \\
\text{soit } \frac{dr}{E_r} &= \frac{r d\theta}{E_\theta} = k \\
\frac{dr}{\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{p\ \cos\theta}{r^3}} &= \frac{r d\theta}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\ \sin\theta}{r^3}} \\
\frac{dr}{r} &= 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta \\
d(\ln\ r) &= 2d\left(\ln\left(\sin\theta\right)\right) \\
\ln r &= 2\ln\left(\sin\theta\right) + C \text{, on pose } C = \ln\ \lambda \\
\ln r &= \ln\left(\sin^2\theta\right) + \ln\ \lambda \\
\ln r &= \ln(\sin^2\theta\ \lambda)
\end{aligned}
$$

Finalement, l'équation des lignes de champ s'écrit en coordonnées polaires:

$$r = \lambda\ \sin^2\theta$$

NB : Pour orienter les lignes de champ, on sait que le champ $\overrightarrow{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissant.

Diagramme électrique du dipole électrostatique.

Isopotentiels et lignes de champ d'un dipôle électrostastique