TP informatique n°4

2 séances de 3 heures

Préparation à remettre lors de la première séance, semaine du 8 Novembre 2004.

Intégration numérique

Introduction et Présentation du TP

Il est courant en **Géologie et en Géophysique** de faire face à une **intégrale qu'il est impossible de calculer analytiquement**. C'est souvent pour une des deux raisons suivantes que l'on ne peut pas calculer cette intégrale:
- *cas 1:* on ne **connaît pas la primtive** de la fonction à intégrer,
- *cas 2:* on a des données recoltées sur le terrain ou durant une expérience au laboratoire qui se présentent sous la forme d'une série de points (voir figure 1 où pour une abscisse donnée on a une ordonnée mesurée). On ne sait pas dans ce cas calculer analytiquement l'aire définie par le nuage de points et l'axe des abscisses.

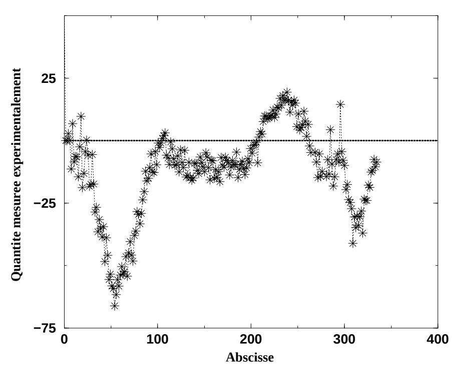

Figure 1: Exemple de données expérimentales où il est difficile analytiquement de calculer l'aire définie entre les points expérimentaux et l'axe des ordonnées.

Dans les deux cas ci-dessus, on procède alors à une

INTEGRATION NUMERIQUE

Beaucoup de **schémas numériques** d'intégration existent: ces schémas numériques proposent divers *algorithmes* numériques adaptés pour calculer l'intégrale. La "complexité"du schéma numérique ou de l'algorithme augmente avec le degré de précision que l'on attend pour le résultat. Dans notre TP, on se satisfera d'un schéma d'intégration très simple basé sur la *méthode des trapèzes* décrite en détail dans **la partie 1** de l'énoncé.

La partie 2 décrit le travail de préparation que vous devez effectuer avant le début du TP. **Ce travail est à rendre sur papier lors de la première séance du TP4.**

La partie 3 a) et b) consiste à programmer la méthode des trapèzes en utilisant le logiciel *Delphi 4* utilisé lors des TP2 et TP3. Cette méthode des trapèzes est appliquée à deux cas particuliers: **a)** on appliquera le schéma d'intégration à la fonction suivante $f(x) = x^2 \sin x$ dont on connaît la primitive: on pourra ainsi comparer la valeur de l'intégrale numérique à la valeur analytique. **b)** on calculera la **masse de la Terre à partir d'un modèle de densité.** Ces deux calculs constitueront l'essentiel de la première séance du TP4.

La partie 4 consiste à représenter sur deux figures les calculs effectués dans la partie 3.

Enfin, la dernière consiste à manipuler les données expérimentales de la figure 1.

Pour résumer, **l'objet du TP est d'effectuer des intégrations numériques et de représenter les résultats sur une figure.**

N.B.:
1) Lors de la première séance de TP, vous aurez accès directement sur les ordinateurs au corrigé du TP sous la fichier d'un fichier exécutable, fichier appelé "TP4.exe".
2) N'oubliez pas de commencer par créer un repertoire TP4 sur votre "compte" informatique dès le début du TP. **C'est dans ce repertoire que nous irons évaluer votre projet.**

1 Le schéma d'intégration: la méthode des *trapèzes*

Soit une fonction $f(x)$ définie entre deux points x_0 et x_N comme schématisée sur la figure 2a. On veut *intégrer* cette fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[x_0,x_N]$. Pour procéder à l'intégration numérique de cette fonction, on *discrétise* l'intervalle compris entre x_0 et x_N en N intervalles égaux de longueur Δx comme sur la figure 2a.

La méthode d'intégration des trapèzes consiste alors à intégrer la fonction f sur chaque intervalle $[x_i,x_{i+1}]=\Delta x$ en utilisant l'algorithme ou le

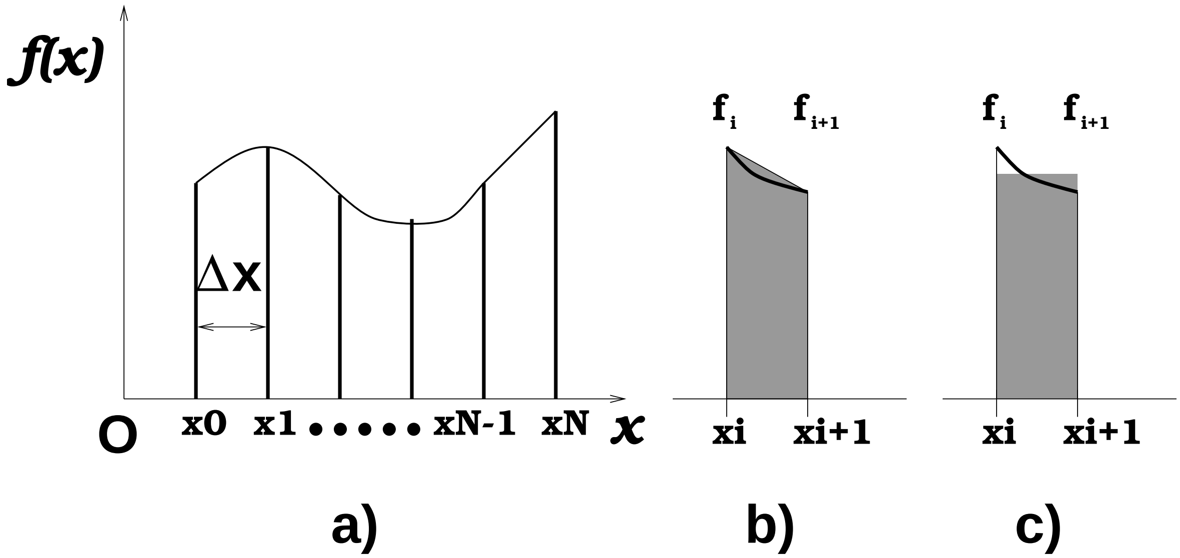

Figure 2: a) Fonction f(x) à intégrer en fonction de x. L'intervalle d'intégration [x_0,x_N] est discrétisé en $(N+1)$ points équidistants x_O .... x_N. Les figures b) et c) sont des illustrations du schéma numérique utilisé donné dans la formule (1). L'intégrale entre deux points x_i et x_{i+1} peut se comprendre comme soit b) l'aire du trapèze $x_i x_{i+1} f_{i+1} f_i$ soit c) l'aire du rectangle de base $x_i x_{i+1}$ et de hauteur $\frac{1}{2}(f_i + f_{i+1})$.

schéma suivant:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \Delta x \Big[\frac{1}{2} f_i + \frac{1}{2} f_{i+1}\Big] \; + O(\Delta x^3 f") \quad \text{où } f_i = f(x_i) \qquad (1)$$

Remarque : Le second terme du second membre de l'équation 1 quantifie l'erreur commise sur l'intégrale de f en utilisant la méthode des trapèzes; bien sûr, le schéma numérique de la méthode des trapèzes n'est qu'une méthode pour approximer la valeur exacte de l'intégrale. En choisissant ce schéma, l'ordre de grandeur de l'erreur est quantifié par la valeur $\Delta x^3 f''$ faisant intervenir la valeur du pas d'intégration Δx ainsi que la dérivée seconde de la fonction f. La valeur de l'erreur est bien entendu fondamentale quand on cherche à faire des calculs très précis. Sachez simplement qu'il existe des schémas numériques plus précis que celui utilisé ici mais que le schéma basé sur les trapèzes nous suffira pour la précision recherchée dans les exercices.

Le signification du schéma numérique (1) est donnée sur les figures 2b et 2c. Pour intégrer une fonction entre 2 points x_i et x_{i+1}, on calcule l'aire du trapèze definie par les 4 points $x_i x_{i+1} f_{i+1} f_i$ (figure 2b) ou encore l'aire du rectangle de largeur le pas d'intégration Δx de hauteur $\frac{1}{2}(f_i + f_{i+1})$ (figure 2c). On "comprend" alors que plus on prend un pas d'intégration Δx "petit" et plus on se rapproche d'un calcul précis pour la valeur finale de l'intégrale. En **itérant** le schéma sur tout l'intervalle d'intégration $[x_0 x_N]$ (*itérer* le schéma 1 signifie que l'on fait varier l'indice i dans l'équation) on obtient la formule suivante pour l'intégrale de f entre x_0 et x_N:

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)\, dx = \Delta x \Big[\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \cdots f_{N-1} + \frac{1}{2} f_N\Big] \; + O(\Delta x^3 f") \qquad (2)$$

2 Préparation du TP

A rendre au début de la première séance de TP

2.1 Le schéma des trapèzes

Soit une fonction f que l'on veut intégrer sur un intervalle $[x_0, x_N]$ par la méthode des trapèzes présentée dans la partie 1.

a) Ecrire la relation qui lie Δx et N (le nombre d'intervalles choisi)

b) Démontrer que l'aire du triangle et l'aire du rectangle des figures 2 sont équivalentes

c) Démontrer pourquoi la relation 1 aboutit à la relation 2.

2.2 Intégration de $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi x^2 \sin x dx$

Lors de la première application de la méthode des trapèzes, on aura à calculer l'aire définie par la fonction $f(x) = x^2 \sin x$ entre 0 et π représentée sur la figure 3.

a) Chercher la primitive de cette fonction (par intégration par parties) et en déduire la valeur de l'intégrale entre 0 et π.

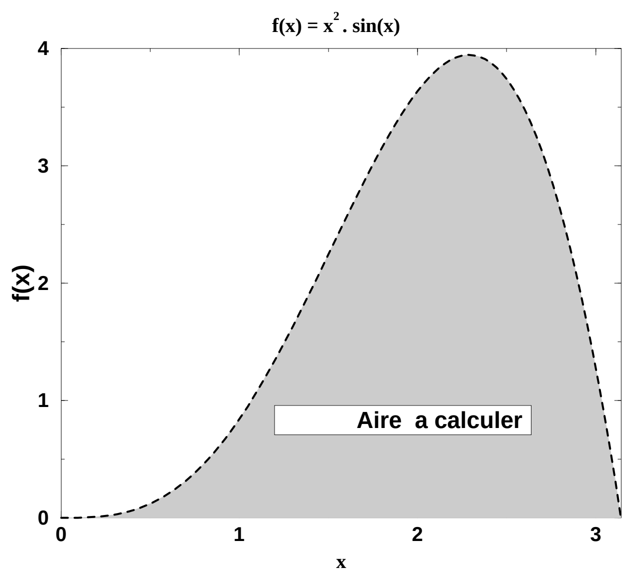

Figure 3: Fonction $f(x) = x^2 \sin x$ entre 0 et π (traits pointillés). L'aire à calculer est en grisé sur la figure.

b) Ecrire l'algorithme permettant d'appliquer le schéma numérique (2) pour l'intégration de (3).

Pour vous guider, il faudra:

1) se donner une valeur de Δx.

2) "rentrer" les valeurs de x_i et $f(x_i)$ en chaque point i de l'espace discrétisé.
3) procéder à l'intégration en utilisant (2)).

Remarque: Il faudra au préalable, d'une part, **préciser les types de variables** (entier, réel, complexe, tableau etc ...) que l'on utilise dans le programme pour $N, \Delta x, x_i, f_i$ etc... D'autre part il faudra réfléchir à: quelles seront les **variables globales**, quelles seront les **variables locales** selon les besoins dans le programme.

Transcrire l'algorithme en langage Pascal classique (vu dans les exercices d'introduction au Pascal).

2.3 Intégration de la masse de la Terre à partir d'un modèle de densité

Lors de la deuxième application de la méthode des trapèzes, on aura à calculer la masse totale de la Terre à partir d'un modèle de densité. Dans la partie 3 de l'énoncé, on donnera plus précisément une densité ρ (ou masse volumique) en g/cm^3 en fonction du rayon en km.

Ecrire l'intégrale qui permet de retrouver la masse totale de la Terre en kg (intégrale volumique); il faut trouver en particulier le coefficient multiplicatif qui permet d'obtenir une masse de la Terre en kg à partir d'une densité en g/cm^3 et un rayon en km.

3 Ecriture sous Delphi 4 du schéma des trapèzes: Première séance du TP4

3.1 Intégration de $f(x) = x^2 \sin x$ entre 0 et π

Pour tester notre schéma d'intégration (2), nous allons calculer numériquement la valeur de l'intégrale suivante:

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin(x)\, dx \tag{3}$$

En l'occurrence, la primitive de cette fonction est connue; vous l'avez calculé dans la partie 2 du TP.

Puisque l'on connaît la valeur analytique de cette intégrale, l'objet de ce premier exercice est de tester le degré de précision du schéma numérique en faisant varier la valeur du pas d'intégration Δx (ou encore le nombre de points N sur l'axe des abscisses).

Objets dans le projet delphi (voir corrigé)
Seuls 5 objets seront nécessaires dans ce projet.
- un objet *MainMenu* dans lequel on définira une procédure pour quitter le programme, une procédure pour calculer l'intégrale de f, une procédure pour calculer la masse de la Terre et enfin deux procédures de dessin pour representer les résultats.
- un objet *Memo* pour afficher le résultat de l'intégration de f.
- un autre objet *Memo* pour afficher la masse de la Terre.
- un objet *Image* (dans le sous-répertoire *Supplément* de la barre de menu) dans lequel on viendra représenter la fonction f et son intégrale.
- un objet *Image* dans lequel on viendra représenter le modèle de densité et la masse de la Terre.

Ecrire la procédure permettant d'appliquer le schéma numérique (2) pour l'intégration de (3) (l'équivalent du menu integrationf dans "TP4.exe"). Suivre l'exemple: on doit ensuite afficher dans un objet *Memo* le nombre de pas choisi N, le résultat de l'intégration, la différence entre le résultat numérique et la valeur théorique affichée avec 10 chiffres après la virgule.

Faire varier N=5,10,20,30,40,50,100,1000. Que constatez vous concernant la précision du résultat?

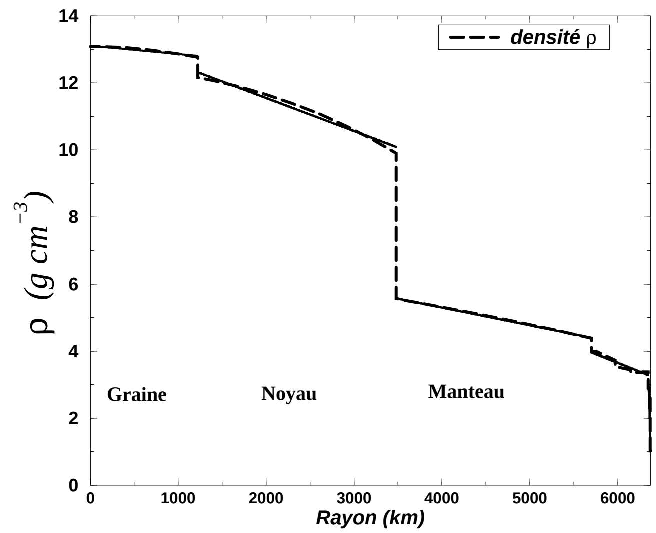

Figure 4: Modèle de densité (pointillé) PREM. Les régressions linéaires sont en trait continus.

3.2 Intégration numérique de la masse de la Terre

On possède en Géophysique des modèles globaux de Terre. Pour les construire on utilise les données sismologiques (temps de parcours des ondes sismiques en fonction de leur distance épicentrale et analyse des modes de vibration propres de la Terre à la suite d'un séisme); on "inverse" ensuite toutes ces données pour obtenir le "meilleur" modèle de Terre. La figure 4 représente la densité en fonction du rayon de la Terre tirée du modèle PREM, obtenue en 1981 par Dziewonski & Anderson. Le modèle PREM est en pointillés sur la figure 4. On distingue notamment des discontinuités marquées en densité aux frontières entre couches: Graine-Noyau Liquide, Noyau liquide-Manteau inférieur, Manteau inférieur-Manteau supérieur (transition de phase à 670 km en rayon).

On veut calculer la masse de la Terre à partir de ce modèle de densité.

Afin de pouvoir appliquer le même algorithme numérique qu'à l'exercice précédent, nous avons procédé à une *régression linéaire* de la densité en fonction du rayon afin d'obtenir une fonction connue $\rho(r)$. Les résultats de cette régression sont les suivants:
pour $r \leq 1221km$, $\rho(r) = 13.11 - 0.0002487 * r$
pour $r \leq 3480km$, $\rho(r) = 13.52 - 0.0009864615 * r$
pour $r \leq 5701km$, $\rho(r) = 7.42 - 0.0005303838 * r$
pour $r \leq 6347km$, $\rho(r) = 9.962212 - 0.001052137 * r$
pour $r \leq 6371km$, $\rho(r) = 482.5542 - 0.07551769 * r$

Le régressions sont représentées sur la figure 4 par les fonctions linéaires (droites).

Attention: dans les régressions, r est en km et ρ est $g\ cm^{-3}$

Programmer l'intégrale de la fonction que vous avez obtenue dans la question 2.3 en utilisant le même algorithme qu'à l'exercice précédent.

4 Représentation des résultats sur des objets *Images*: Deuxième séance du TP4

4.1 Représentation de la fonction $f(x)$ et la valeur de l'intégrale.

Il vous est demandé de représenter la fonction $f(x)$ ainsi que la valeur de l'intégrale à chaque pas d'intégration sur une figure où l'abscisse x varie entre 0 et π.

Pour cela on vous demande d'utiliser un objet *image*.

4.2 Représentation du modèle de densité et la valeur de la masse de la Terre en fonction du rayon de la Terre

Représenter la fonction ρ en fonction du rayon ainsi que la valeur de l'intégrale M en fonction du rayon. Pour représenter ρ et $M(r)$ sur la même figure, il faudra diviser la masse M par le facteur $10^{24}kg$ (voir corrigé également).
Utiliser un seconde image.

Pour tracer ces fonctions on vous demande de vous inspirer du projet "Dessindroite" qui représente deux segments de droite dans un repère où x varie entre 0 et 10 et y varie entre 0 et 2.

C'est à vous de comprendre comment est programmée cette procédure et c'est à vous de l'adapter.

<u>Texte de la procédure Tform1.droite1Click de l'unité pascal du projet Dessindroite</u>

```
procedure TForm1.droite1Click(Sender: TObject);
const
marge=40;
var
i,h,w,a,x0,y0,uy,ux: integer;
s: string;

begin
//définition de la hauteur et de la largeur de l'objet image1
h:=image1.Height;
w:=image1.Width;
//coordonnées du point (0,0) du graphe
```

```
x0:=marge;
y0:=h-marge;
//nbre de pixels par vecteurs unitaires (ymax=2 et xmax=10)
uy:=round((h-2*marge)/2);
ux:=round((w-2*marge)/10);
With image1.canvas do
begin
pen.color:=clBlack; font.color:=clBlack;
// dessin des axes
Rectangle(x0,marge,w-marge+1,y0+1);
// dessin des graduations sur (0x)
font.size:=18;
for i:=1 to 4 do
begin
a := round(x0+ux*2*i);
s := IntToStr(2*i);
moveto(a,y0);
lineto(a,y0+6);
TextOut(a - TextWidth(s) div 2, y0+10, s);
end;
// dessin des graduations sur (Oy)
for i := 0 to 2 do
begin
a := round(y0-uy*i);
moveto(x0,a);
lineto(x0-6,a);
moveto(w-marge,a);
lineto(w-marge-6,a);
s := IntToStr(i);
textOut(x0 - textWidth(s)- 8,a-5, s);
end;
légendes des axes
font.color := clBlack;
textOut(round(w/2),y0+15,'x');
font.color := clRed;
textOut(x0,marge-30,'f(x)');
pen.color:=clRed;
dessin de la fonction f : ici 2 segments de droites,
les points (1,0.5) et (5,2) sont joints, ainsi que
(5,2) et (9,1.5).
moveto(x0+ux,round(y0-0.5*uy)); lineto(x0+5*ux,y0-2*uy);
moveto(x0+5*ux,y0-2*uy); lineto(x0+9*ux,round(y0-1.5*uy));
// titre du graphe
font.size:=20;
font.color := clGreen;
s:='Exemple';
textout(round(w/2)-40,0,s);
end; with image
```

end;

5 Manipulation des données expérimentales de la figure 1. (question facultative)

Les données de la figure 1 sont dans le fichier "DataFig1" que pouvez lire et manipuler. C'est un fichier qui se présente sous la forme de deux colonnes: abscisses, ordonnées.

5.1 Calcul de l'intégrale

On vous demande de calculer l'intégrale définie par les points expérimentaux (méthode des trapèzes).

5.2 Calcul de la valeur moyenne expérimentale.

On vous demande de calculer la valeur moyenne des points expérimentaux.

Pour ces deux dernières questions, à vous de voir comment représenter les résulats.